L'ARGUMENT D'ANSELME EN LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Joseph Vidal-Rosset
Université de Lorraine

Cette note (qui est une version profondément modifiée de mon intervention à la journée d'étude du 12 février 2018 aux Archives Vuillemin à Nancy) apporte une preuve formelle simple de la validité de l'argument d'Anselme. Le texte qui suit est la traduction que Gaunilon donne de cet argument. Par des ajouts entre crochets, on modifie cependant le texte de Gaunilon en tenant compte de la remarque d'Anselme (Anselme de Cantorbéry, 1993, p. 96–98), qui insiste à raison sur le fait que la preuve du chapitre 2 du *Proslogion* ne mentionne pas l'expression ce qui est plus grand que tout, dont Gaunilon fait usage, mais ce qui est tel que rien de plus grand ne se peut penser :

> « Si [ce qui est tel que rien de plus grand ne se peut penser] est seulement dans l'intellect, tout ce qui est [conçu comme] existant en réalité sera [pensé comme lui étant] supérieur, et ainsi [ce qui est tel que rien de plus grand ne se peut penser] sera pensé comme moindre que n'importe quelle chose [qui existe en réalité] et donc ne sera tel que rien de plus grand ne se peut penser – ce qui est contradictoire. Partant, il est nécessaire que ce qui est tel que rien de plus grand ne se peut penser soit admis comme existant non seulement dans l'intelligence, mais aussi dans la réalité. » (*Ibid.*, p. 77)

On utilisera la syntaxe standard du calcul des prédicats pour formaliser cet argument dont voici le lexique :

- $x > y$ signifie « x est [pensé comme] plus grand que y »,
- $\neg(x > y)$ signifie « il est faux que x soit [pensé comme] plus grand que y »,
- δ est le symbole de constante qui ne fait référence qu'à cet unique individu que l'on nomme « Dieu ».
- $R\delta$ signife « Dieu est [pensé comme] quelque chose qui existe en réalité ».

Le problème étant de savoir si Dieu existe en réalité, on se dispense du prédicat « être dans l'entendement » et l'on s'appuie sur trois formules :

$$\forall y \neg(y > \delta)$$

autrement dit, rien de plus grand que Dieu ne peut être pensé (y compris Dieu lui-même, comme me l'a pertinemment fait remarquer Thomas Forster) ;

$$\forall x \forall y((\neg Rx \wedge Ry) \rightarrow (y > x))$$

autrement dit, tout ce qui est [pensé comme] une chose qui existe en réalité est aussi [pensé comme] supérieur à tout ce qui n'est pas pensé comme tel ;

$$Ra$$

autrement dit, un individu quelconque, disons a, existe en réalité.

Dès lors, l'argument d'Anselme se traduit par le séquent suivant :

$$\forall y\neg(y>\delta),\forall x\forall y((\neg Rx\wedge Ry)\to(y>x)),Ra\vdash R\delta$$

qui est prouvable en logique *classique* du premier ordre :

Démonstration.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall y\neg(y>\delta)$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\neg(a>\delta)$}
\AxiomC{$\forall x\forall y((\neg Rx\wedge Ry)\to(y>x))$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\forall y((\neg R\delta\wedge Ry)\to(y>\delta))$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$(\neg R\delta\wedge Ra)\to(a>\delta)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(1)}
\UnaryInfC{$\neg R\delta$}
\AxiomC{Ra}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\neg R\delta\wedge Ra$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$a>\delta$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$DN,(1)$}
\UnaryInfC{$R\delta$}
\end{prooftree}
$$

Q.E.D.

Cette formalisation permet trois remarques.

Remarque 1

En dépit du caractère classiquement valide de l'argument, la définition anselmienne de Dieu a été suspectée d'impliquer un paradoxe *épistémologique* comparable à celui du Menteur, ou un paradoxe *mathématique* comparable à celui de Burali-Forti (Vuillemin, 1971, p. 53–85). Cette dernière objection serait recevable en l'absence de toute théorie mathématique cohérente compatible avec la définition d'une entité comparable à la définition anselmienne de Dieu. Mais tel n'est pas le cas, puisque Jensen (Jensen, 1969) a démontré la cohérence de la théorie des ensembles NFU qui, contrairement à ZF, admet l'existence d'un *ensemble* universel (noté *V*) qui contient toute chose, y compris lui-même ou l'ensemble de ses parties et qui, dans cette théorie non zermelienne des ensembles, est donc est bien tel que rien de plus grand ne peut être pensé ou défini (Holmes, 1998, p. 19). La faille de l'argument d'Anselme ne réside donc pas dans sa prémisse majeure, celle-ci n'impliquant pas *nécessairement* un paradoxe.

Remarque 2

La décharge de la prémisse mineure qu'est la négation du prédicat d'existence $\neg R\delta$ montre que, contrairement encore à ce soutient Vuillemin (Vuillemin, 1971, p. 19–23), l'argument est une preuve ontologique ou, plus exactement, qu'il est une réduction à l'absurde de la négation de la preuve ontologique et qu'il se heurte à l'objection de Kant : l'existence n'est pas un prédicat *réel*, ce qui signifie que l'on ne peut pas déduire du concept d'un objet la proposition synthétique qui affirme l'existence de l'objet hors de son concept (Anselme de Cantorbéry, 1993, Annexe, p. 124–132). Sur ce point, si l'on adopte avec Lambert une logique libre des présuppositions existentielles impliquées par l'usage des termes singuliers et généraux (Lambert, 2002, p. 123), alors on peut remarquer que rien ne prouve que le symbole de constante δ fait référence à un objet qui existe. Quant au prédicat d'existence *R*, il ne permet en aucun cas d'affirmer que l'existence de Dieu est logiquement prouvée, puisqu'une tout autre interprétation de *R* n'affecterait nullement la validité de la preuve donnée plus haut.

Remarque 3

Enfin, il est incontestable qu'un intuitionniste pourrait rejeter l'argument d'Anselme en raison de l'usage de la règle classique de l'élimination de la double négation (DN). La logique intuitionniste permet simplement de conclure par $\neg\neg R\delta$, ce qui signifie de ce point de vue que la conséquence logique de ces trois prémisses est qu'il est absurde de soutenir la thèse selon laquelle Dieu n'existe pas en réalité. En admettant ces prémisses, l'intuitionniste concéderait la réfutation de l'athéisme, non celle de l'agnosticisme.

Références

Anselme de Cantorbéry, *Proslogion : Allocution sur l'existence de Dieu*, trad. B. Pautrat, Paris, Flammarion, 1993.
Holmes M. R., *Elementary Set Theory with a Universal Set*, Cahiers Du Centre de Logique, vol. 10, Louvain-la-Neuve, Academia-Bruylant, 1998.
Jensen R. B., « On the Consistency of a Slight (?) Modification of Quine's NF », in *Synthese*, n° 21, 1969, p. 278–91.
Lambert K., *Free Logic : Selected Essays*, Cambridge, UK/New York, Cambridge University Press, 2002.
Vuillemin J., *Le Dieu d'Anselme et les apparences de la raison*, vol. 14, Collection Analyse et Raisons, Paris, Aubier-Montaigne, 1971.