DU PROBLÈME DU TIERS EXCLU À CELUI DE LA RÉDUCTION ALGORITHMIQUE D'UN SYSTÈME. LA RÉPONSE DE HUSSERL AU PROBLÈME DE LA COMPLÉTUDE MATHÉMATIQUE

Daniel B. Lancereau[1](Toulouse)

Quel rôle joue le tiers exclu dans la logique de Husserl ? En essayant de répondre à cette question, il apparaît que le problème se pose chez Husserl sur un plan mathématique, lequel est préparé par la logique de Leibniz. Une fois le problème replacé dans l'horizon leibnizien d'une *mathesis universalis* débouchant sur une omniscience confuse, on est tenté de lier le problème du tiers exclu à la question de la complétude. Cela vaut pour Husserl, mais il importe alors d'ajouter que ce dernier n'envisage pas la complétude dans les termes hilbertiens d'une maximalité axiomatique. Une analyse moderne des textes de Husserl montre en effet que le problème de la complétude, tel qu'il se pose dans la *Philosophie de l'arithmétique* et dans les *Recherches logiques,* peut se traduire par la question de la réduction algorithmique d'un système. On se propose alors d'analyser les enjeux liés à celle-ci en contextualisant le propos. Il est alors montré que la position husserlienne est susceptible de s'inscrire dans une perspective finitaire. On la fait alors contraster avec les écrits tardifs de Gödel qui, cherchant à traduire le problème du tiers dans une perspective infinitaire, confrontent le problème du tiers à l'épreuve de l'idéalisation et de la généralisation.

1. Du problème du tiers exclu chez Leibniz à l'omniscience confuse des mathématiques

Dans ce premier point, nous nous proposons de traiter du tiers chez Leibniz au sens où ce dernier prépare le terrain sur lequel se posera la question à l'époque de Husserl. Certes, on peut être réticent à ce genre de transposition et considérer qu'il faille replacer Leibniz en son temps et, par exemple, le comparer à Descartes. Les deux démarches ne sont toutefois nullement incompatibles. En effet, une comparaison de Leibniz à Descartes contribue à faire ressortir l'actualité du premier. On peut donc remarquer sans nuire à notre volonté de rapprocher Leibniz des logiques mathématiques du 20[e] siècle que, pour la question du tiers exclu, Leibniz, comme souvent, s'oppose à Descartes. Chez

1 Nous remercions Guillaume Lejeune qui a bien voulu solliciter cet article et nous faire bénéficier de ses talents d'éditeur. Nous remercions aussi Mmes Anne-Marie Berdeil et Colette Esposito, de la Bibliothèque d'Etude et du Patrimoine (Toulouse), de leur aide précieuse dans la recherche des documents.

ce dernier, dès qu'il s'agit de l'infini, le tiers cesse de s'appliquer. Et Descartes s'en tient strictement à ce principe : il y a chez lui un refus d'appliquer le tiers à l'infini ou à l'indéfini. Ce qui veut dire que le tiers ne peut s'appliquer à un universel, d'une part, et que, d'autre part, il ne peut s'appliquer à une chose en puissance. À quoi s'applique-t-il donc ? À un existant dont j'ai actuellement l'intuition. Adopter cette position, n'est-ce pas se détourner d'emblée d'une question majeure : celle du passage à la limite ? « Descartes s'en tient (...) toujours à son refus d'application du tiers exclu à l'infini ou à l'indéfini. Par ce refus il se détourne des problèmes que pose la notion de « passage à la limite »»[2]. Il en va tout autrement chez Leibniz, où la notion de passage à la limite est fondamentale. C'est d'ailleurs là un point que l'analyse de Paul Schrecker se centrant sur l'infini et le continu a l'intérêt de souligner et de mettre en résonance avec les limites des mathématiques, comme nous le verrons. Mais avant de passer à cette analyse, il importe de rappeler brièvement la position de Leibniz par rapport au tiers exclu. Pour ce faire, partons de deux passages des *Nouveaux essais* : N.E., III, VI (Des noms des substances) et IV, II, 1(Des degrés de notre connaissance).

Quelle est la généalogie du principe de tiers exclu ? Si l'on suit les N.E., tout part du principe d'identité. Ce principe se dédouble en une forme positive, d'une part, et une forme négative, d'autre part. Laissons de côté la forme positive et considérons la seule forme négative. La forme négative du principe d'identité nous mène au principe de contradiction. Et c'est à partir du principe de contradiction que le principe du tiers exclu est défini. Telle est, brièvement exposée, la généalogie du problème, selon le Leibniz des *Nouveaux Essais*.

Leibniz part donc du principe d'identité, il passe de là au principe de contradiction et développe le principe du tiers exclu à partir de lui. L'énoncé leibnizien a la forme suivante : deux propositions dont l'une affirme ce que l'autre nie ne peuvent être ni vraies ni fausses à la fois. De ce principe, découlent deux conséquences : d'abord, une proposition ne saurait être vraie et fausse à la fois ; ensuite, il n'y a point de milieu entre le vrai et le faux. Ce principe semble, au premier abord, d'une très grande généralité, d'une généralité telle que l'on pourrait même dire maximale.

Pourtant, Leibniz en limite aussitôt sa portée. En effet, ce principe ne saurait s'appliquer immédiatement, dit-il, qu'aux propositions identiques de la forme A = A. Il est universel donc, mais sous condition d'identité ; universel dans le domaine identitaire seulement. Cela semble déjà une belle restriction. Pourtant, si l'on part du point de vue leibni-

2 Y. Belaval, *Leibniz, critique de Descartes*, Paris, Gallimard, 1960, p. 228. Voir l'ensemble du commentaire pp. 221-228.

zien, c'est-à-dire si l'on conçoit que toute proposition logique ou mathématique peut être réduite à des vérités identiques, on ne voit pas de conséquence majeure à la restriction posée. Cela ressemble à une opération nulle, où la réduction annule la restriction. Autrement dit, la toujours possible réduction à l'identité semble annihiler du même coup la restriction introduite.

Mais Leibniz fait intervenir ici un dédoublement entre vérités de raison et vérités de fait. Pour rappel, les premières sont nécessaires et leurs opposés sont impossibles alors que les secondes sont contingentes et leurs opposés possibles. Dès lors, accepter le dédoublement, c'est accepter du même coup que le principe du tiers exclu, s'il s'applique bien aux vérités de raison, ne peut s'appliquer dans le domaine des vérités de fait. Pour quelle raison ? C'est qu'il y a toujours devant nous l'obstacle de la réduction à l'identité. C'est que les vérités existentielles ou contingentes exigeraient, pour pouvoir être réduites à l'identité, une analyse infinie. En procédant à cette double limitation (limitation aux vérités qui peuvent être réduites, limitation du principe aux vérités identiques), Leibniz exclut donc les systèmes dont l'analyse logique ne peut pas être effectuée par une série finie d'opérations.

Il y a là chez Leibniz un problème qui le place en résonance directe avec certaines problématiques contemporaines en logique mathématique. Cette résonance est exploitée par Paul Schrecker dans son célèbre article, « Leibniz et le principe du tiers exclu »[3], que nous nous proposons de suivre ici. Selon Schrecker, Leibniz anticipe les débats contemporains « entre l'intuitionnisme et l'axiomatique » (p. VI.76) par sa théorie du continu et la logique qu'elle implique, qui porte un coup à l'universalité matérielle du principe du tiers exclu. Ici, Schrecker traduit Leibniz en empruntant la terminologie moderne. Formulé de façon moderne, on pourrait dire : « il ne peut y avoir de contradiction entre un milieu et sa limite » (p. VI.76). Pour l'étude de ce cas, Schrecker va introduire l'idée leibnizienne d'homogonie. En effet, Leibniz appelle « homogones » ces systèmes où une phase, par un changement continu, peut passer dans une autre, désignée par une notion opposée, à la limite. À la différence de l'égalité cartésienne, qui est statique, Leibniz veut introduire une égalité qui soit tout autre que statique, autrement dit : une égalité dynamique. Mais, pour ce faire, il faut accepter d'accueillir, comme nous l'avons signalé plus haut, une notion non-cartésienne par excellence : celle de passage à la limite. Ac-

3 P. Schrecker, « Leibniz et le principe du tiers exclu », *Actes du Congrès international de philosophie scientifique*, Sorbonne, Paris, 1935, p. VI.75- VI.84. Nous suivons le texte de Schrecker pas à pas et indiquons les références des pages entre parenthèses dans le texte.

cepter cette notion de passage à la limite, c'est du même coup être amené à suspendre l'application du principe du tiers.

C'est qu'il y a une grande différence entre les couples homogènes et les couples homogones. En effet, dans le premier cas, il est possible, par une transformation, de rendre semblables l'un à l'autre les éléments du couple. Dans le second cas, en revanche, il en va tout autrement. C'est par un changement continu qu'un genre peut s'y transformer dans l'espèce opposée (son contradictoire). Si, par exemple, pour Descartes, l'égalité n'est que la négation de l'inégalité, pour Leibniz, l'égalité est l'homogone de l'inégalité. À la suite du cas paradigmatique du mouvement (le repos n'est pas l'opposé, mais la limite du mouvement), Schrecker cite quelques autres exemples, où la même relation vaut tout autant, par exemple entre : le temps et le moment, l'espace et le point, l'étendu et l'inétendu, la convergence et le parallélisme, la courbe et la droite, l'ellipse et la parabole, l'élasticité et la dureté absolue, l'inégalité et l'égalité, etc.

Finalement, à quoi doit-on imputer la suspension du principe du tiers exclu chez Descartes et Leibniz ? Si l'on poursuit la comparaison, la suspension du tiers obéit, chez l'un et chez l'autre, à des contraintes irréductibles. Comme le résume bien Yvon Belaval :

> « Descartes n'a pas de *raison intuitive* pour affirmer ou pour nier l'existence du plus grand nombre : ainsi la suspension du principe de tiers exclu est imputable à la nature de mon entendement fini, et non pas à celle du nombre dont l'entendement infini perçoit le dernier terme, si un tel terme existe. Leibniz a une *raison formelle* pour nier la possibilité du plus grand nombre : la suspension du tiers exclu pour le passage à la limite n'est donc plus imputable à la finitude de mon entendement, puisque même pour Dieu, il n'y a pas de dernier terme, mais à la nature même du continu »[4].

Pour ce domaine des progressions homogones, tel que l'entend Leibniz, le tiers exclu ne peut valoir. Ce qui ne veut pas dire qu'il devienne faux pour autant. « Comme dirait l'intuitionniste, l'absurdité de l'absurdité du *tertium non datur* subsiste » (p. VI.77). Ici, Schrecker cite Heyting. Dans ce domaine, il n'y est simplement d'aucun usage pour une raison simple : c'est que, dans ce domaine homogone, il n'y a pas de contradiction matérielle possible. Les paires que nous avons présentées plus haut, puisqu'elles relèvent du domaine des systèmes homogones, ne sont pas, ne peuvent pas être en relation de contradiction logique. Or, c'était la condition indispensable pour l'application du principe du tiers exclu. Si la condition saute, il en va de même du principe.

4 Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, op. cit., p. 336.

La logique leibnizienne écarte implicitement l'usage du tiers exclu dès qu'il s'agit d'un système continu et tant que le caractère de continuité entre en ligne de compte (p. VI.83). Cela s'explique par le fait que l'application du principe du tiers exclu a pour condition préalable qu'il y ait deux propositions, dont l'une nie une relation que l'autre affirme. Or, dans un devenir continu, il est impossible de déterminer la relation de deux de ses phases, par exemple l'égalité ou l'inégalité de deux nombres réels. Pourquoi ? Parce qu'on ne saurait réduire les deux propositions à une proposition identique et à sa négation.

C'est la même impossibilité qui s'oppose à la détermination du moment présent. Dans tous les cas, la raison de l'impossibilité est la même que celle qui empêche la connaissance *a priori*, par une série finie de syllogismes, d'une existence de fait : c'est la nécessité d'un *regressus in infinitum*.

Cette analyse infinie, on peut l'éviter. Comment cela ? En faisant comme si... En la feignant menée à bout, par un axiome transfini, dépourvu d'évidence et arbitrairement érigé, et qui n'est pas en contradiction avec les autres axiomes qui constituent la base logique des mathématiques. Ici, Schrecker cite David Hilbert, en ces termes :

> « Cette méthode formaliste de M. David Hilbert affranchit, sans doute, le *tertium non datur* de sa limitation au fini, puisqu'elle permet toujours la réduction aux axiomes, par une série finie d'opérations. Mais on peut se demander si le système fondé sur cette base, tout en ne comportant aucun risque de contradiction mais aussi aucune possibilité d'évidence, appartient encore à cette *ipsissima scientia infiniti* qui vise le continu » (p. VI.83).

Ce qui est sûr, c'est que la logique bipartite, la logique statique des genres actuellement divisés en espèces qui s'excluent l'une l'autre, est incapable de suivre cette « analysis gradaria » *pro gradu* qui est propre à la science de l'infini. En résumé, l'idée de continuité semble être incompatible avec l'axiome logique que constitue, pour Leibniz, le principe de contradiction. Mais cette incompatibilité n'est qu'apparente. Car le principe du tiers exclu ne devient jamais faux, il est seulement inapplicable dans les domaines où il n'y a pas de contradiction logique possible (p. VI.84).

Leibniz a essayé de rattacher son principe de continuité à son système d'axiomes logiques, en le faisant dépendre du principe de raison suffisante (il n'y a jamais de raison pour arrêter le processus de division ou de multiplication). Cependant, la notion de similitude entre la droite et chacune de ses parties créées par la division est élémentaire et ne dépend pas de la subsistance de la même raison (qui la suppose plutôt que de la constituer). L'idée de fonder l'infinité du continu sur la similitude entre la droite et ses parties « contient déjà, en germe, le critérium de l'infinité d'un ensemble, établi par Bolzano, Dedekind et Cantor, et que cette notion de similitude est l'anticipation de celle d'équivalence, si féconde dans la théorie contemporaine des ensembles ». Et Paul Schrecker de conclure :

> « Mais l'idée de continuité n'en demeure pas moins indépendante du système leibnizien d'axiomes logiques. La tension irréductible entre ces deux pôles également indispensables de la connaissance logico-mathématique pousse la pensée, toujours de nouveau, dans le labyrinthe du continu. Mais c'est encore elle qui empêche cette science de revenir à une tautologie sans but » (p. VI.84).

On retiendra de cette première approche du problème, l'approche leibnizienne du tiers exclu telle qu'elle est présentée par Paul Schrecker en 1935, deux points importants :

a. d'une part, se pose le problème du domaine de validité, c'est-à-dire d'applicabilité du principe de tiers exclu. Autrement dit, il n'est pas valable partout, en tout temps et en tout lieu ; il est valable ici ou là. Chez Descartes, comme chez Leibniz, il y a des domaines où il vaut, et des domaines où il ne vaut pas. C'est un premier point, particulier, à retenir ;
b. d'autre part, se pose le problème plus général de l'omniscience. Si l'omniscience est claire, et claire partout, elle ne peut manquer d'être totale ; dès lors, le principe du tiers est aussi valable partout, sans restriction aucune. Si, en revanche, l'omniscience est « confuse », pour reprendre l'expression de Leibniz, il en va tout autrement. Car la « confusion » introduit dans l'omniscience même une manière de contre-balancement, qui restreint d'autant l'étendue de l'omniscience. Nous retrouverons ce problème essentiel de l'omniscience logique à l'époque contemporaine[5].La question de la science de l'infini que Leibniz contribue à poser est en phase avec l'intuitionnisme de Weyl. Pour Leibniz, l'infini, tout en excédant la pensée mathématique, lui fournit l'orientation et le but. Leibniz est ainsi comme le note Schrecker « en harmonie avec l'intuitionnisme contemporain qui, pour la même raison, définit la mathématique

5 Accepter le principe de tiers exclu en tout temps et en tout lieu, c'est en effet poser l'omniscience logique. Or, cela ne va pas de soi. Ce problème, déjà soulevé chez Descartes et Leibniz, avec des raisons différentes, sera abordé explicitement, à l'époque moderne, par l'intuitionnisme de Brouwer. À la fin de notre seconde partie sur Husserl, nous mentionnons la reprise explicite du problème de l'omniscience logique dans les travaux d'Errett Bishop et ceux de Rohit Parikh. Voir E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Mc Graw Hill, 1967 ; R. Parikh, « Logical Omniscience », in : *Logic and Computational Complexity*, ed. By D. Leivant, Lectures Notes in Computer Science, Springer, 1995, p. 22-29.

comme la science de l'infini » (p. VI.79). Il reste que cette science n'est une "omniscience" que sous couvert de confusion. L'infini ne pouvant être réduit à une totalité qu'en mettant un terme à la continuité et en acceptant une certaine contingence des faits (p.VI.80)[6].Le problème de l'infini et du continu, en tant qu'il restreint le domaine d'application du principe du tiers exclu, conduit Leibniz à l'idée d'une omniscience confuse, omniscience confuse qui définirait les mathématiques et poserait, dans une perspective finitaire, le problème du cadre épistémologique d'une réduction algorithmique. En ce sens, Leibniz préparerait le terrain du traitement husserlien du tiers exclu qui pose, dans son traitement logique du tiers, le problème d'une réduction algorithmique.

2. De la *mathesis universelle* comme science des multiplicités définies formellement au problème husserlien du statut des imaginaires

Husserl évoque le principe du tiers exclu dans différents passages de son livre de 1929, *Logique formelle et logique transcendantale*. Il y parle du « tertium » aux paragraphes 18 et 31 et du « Satz vom ausgeschlossenen Dritten » aux paragraphes 20, 77, 80 et 88. Ces considérations nous conduisent aux présuppositions fondamentales de la genèse du sens et montrent comment celles-ci se lient à la question du tiers exclu. Husserl en parle tantôt comme d'un principe simple, tantôt comme d'un principe double, l'associant au principe de contradiction. Un des apports essentiels de ces réflexions est la façon dont Husserl lie la question du tiers à celle de la multiplicité et cherche l'origine de ce concept en se référant à Riemann[7]. Il est toutefois intéressant de replacer ces considérations dans le cadre plus général de sa logique phénoménologique et de sa philosophie, laquelle se revendique explicitement de Leibniz.[8] Un point intéressant dans cet héritage est sa reprise du concept de *mathesis universalis*. En tant que celle-ci est une science universelle, dont on ne peut s'empêcher sur un plan métaphysique d'estimer la complétude,

---

6 Cette thèse leibnizienne est fondamentale pour notre propos. Nous aurons l'occasion d'y revenir, quand il sera question de l'omniscience logique telle qu'elle est présupposée par le principe du tiers exclu.

7 Sur la notion de multiplicité chez Riemann et Grassmann, cf. Husserl : *Logische Untersuchungen* I (*Prolegomena zur reinen Logik*), § 70 : « Erläuterungen zur Idee der reinen Mannigfaltigkeitslehre ». Husserl y écrit : « … die « formale Mathematik » in allergemeinstem Sinne oder die Mannigfaltigkeitslehre, diese höchste Blüte der modernen Mathematik ». Aussi Husserl : *Logique formelle et logique transcendantale*, trad. fr. Suzanne Bachelard, Paris, PUF, 1957, § 30. Pour le contexte et les enjeux mathématiques, voir L. Boi : *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, chap. II : « Le concept de variété et la nouvelle géométrie de l'espace : la pensée mathématique de Bernhard Riemann et ses développements », Springer, 1995, pp. 127-259.

8 « Ich bin nur Leibnizianer » (Lettre de Husserl à Mahnke, 26 décembre 1917). « Ich selbst bin eigentlich Monadologe » (Lettre de Husserl à Mahnke, 5 janvier 1917). Cf. « Leibniz : Lectures phénoménologiques. A l'occasion du tricentenaire de la mort de Leibniz », *Philosophie*, 129, mars 2016, sous la direction de Dominique Pradelle. Citations extraites de la correspondance Husserl / Mahnke, p. 16-54.

elle intéresse directement la question du tiers.Dans un célèbre passage de sa *Krisis*, Husserl évoque Leibniz, mais les concepts auxquels il fait référence, la *mathesis universalis* et les « multiplicités définies », peuvent être considérés comme faisant partie d'un invariant conceptuel qui court de 1900 à 1936[9], soit des premières *Recherches logiques* au texte qui, comme la *Krisis*, sont écrits à la fin de la vie de Husserl.Écoutons ce que dit Husserl au § 9 de la *Krisis* [10] :

> « Leibniz a le premier aperçu, précédant du reste de loin son époque, l'idée universelle fermée sur elle-même d'une pensée algébrique au plus haut sens du terme, l'idée d'une « mathesis universalis », comme il l'appelait ; il a le premier reconnu en elle la tâche de l'avenir, alors que c'est seulement à notre époque qu'elle s'est au moins approchée de sa réalisation systématique. Dans la totalité et la plénitude de son sens elle n'est rien d'autre qu'une logique formelle développée dans toutes les directions (et dont la réalisation, dans la totalité propre à son essence, va à l'infini), une science des formes-de-sens du « quelque chose » en général, formes constructibles dans une pensée pure, c'est-à-dire dans une généralité formelle vide ; et sur ce fondement une science des « multiplicités » qu'il est possible de construire systématiquement comme étant libres de contradictions d'après les lois élémentaires formelles de la non-contradiction pour de telles constructions ; enfin en son plus haut une science de l'universum des multiplicités de ce type imaginables en général. Les « multiplicités » sont donc des totalités compossibles d'objets en général, qui ne sont pensées comme étant « certaines » totalités – entendons des totalités définies par des modalités déterminées du « quelque chose » en général – que dans une généralité formelle vide. Parmi ces multiplicités se distinguent ce que l'on appelle les « multiplicités définies », dont la définition par un système d'axiomes complet donne aux objets-substrats formels contenus en elles, dans toutes leurs déterminations déductives, une totalité d'une nature particulière, avec laquelle on construit, peut-on dire, l'idée logico-for-

---

9 Cet ensemble englobe les *Recherches logiques*, le *Doppelvortrag* de Göttingen : « Das Imaginäre in der Arithmetik » (présenté les 26 novembre et 10 décembre 1901 au séminaire de David Hilbert), les *Ideen*, la *Logique formelle et logique transcendentale* et la *Krisis*.

10 La note 1 de la page 45 indique : « Genaueres über den Begriff der definiten Mannigfaltigkeit vgl. « Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie ». 1913 u. ö. S. 135 ff. - Zur Idee der « mathesis universalis » cf. « Logische Untersuchungen », I, 1900, in zweiter Bearbeitung 1913 u. ö. ; und vor allem « Formale und transzendentale Logik », Halle, Niemeyer, 1930 ».

melle d'un monde en général. La théorie de la multiplicité au sens éminent est la science universelle des multiplicités définies »[11].

L'influence leibnizienne sur Husserl s'inscrit dans un horizon conceptuel qui se structure autour des notions de « mathesis universalis » et de « multiplicités définies ». En essayant de définir la « mathesis universalis », une algèbre qui puisse s'appliquer à tout et qui réaliserait en quelque sorte le rêve d'une omniscience clarifiée, à travers l'idée de multiplicités définies, Husserl se penche sur le problème de la définitude. Il lie celui-ci au statut de l'imaginaire mathématique. Il apparaît alors que celui-ci gagne sa complétude au prix d'une réduction. Il s'agit d'opérer une réduction algorithmique minimale sur le réel pour pouvoir appliquer une logique mathématique qui, excluant le tiers, procède de multiplicités strictement définies.

À la lecture de l'extrait précité, il faut souligner deux notions qui viennent et reviennent de 1900 à 1936 sans discontinuer dans les textes husserliens : la notion de *mathesis universalis* et la notion de multiplicité[12] – plus précisément, de « multiplicité définie » (*definite Mannigfaltigkeit*)[13]. La première nous dit l'ancrage leibnizien ; la seconde,

11 E. Husserl, *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie*, herausgegeben von Walter Biemel, 2. Auflage, Den Haag, Martinus Nijhoff, 1976, p. 44-45 : « Leibniz hat zuerst, freilch seiner Zeit weit vorauseilend, die universale in sich geschlossene Idee eines höchsten algebraischen Denkens, einer « mathesis universalis », wie er es nannte, erschaut und als Aufgabe der Zukunft erkannt, während sie erst in unserer Zeit einer systematischen Ausgestaltung mindestens nahegekommen ist. Ihrem vollen und ganzen Sinne nach ist sie nichts anderes als eine allseitig durchgeführte (bzw. In ihrer eigenwesentlichen Totalität ins Unendliche durchzuführende) formale Logik, eine Wissenschaft von den in einem reinen Denken, und zwar in leerformaler Allgemeinheit, konstruierbaren Sinngestalten des « Etwas überhaupt » und auf diesem Grunde von den nach formalen Elementargesetzen der Widerspruchslosigkeit solcher Konstruktionen systematisch als in sich widerspruchtslos aufzubauenden « Mannigfaltigkeiten » ; zuhöchst Wissenschaft vom Universum der so erdenklichen « Mannigfaltigkeiten » überhaupt. « Mannigfaltigkeiten » sind also in sich kompossible Allheiten von Gegenständen überhaupt, die nur in leerformaler Allgemeinheit als « gewisse », und zwar als durch bestimmte Modalitäten des Etwas-überhaupt definierte gedacht sind. Unter ihnen sind die sogenannten « definiten » Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet, deren Definition durch ein « vollständiges Axiomensystem » den in ihnen beschlossenen formalen Substratgegenständen in allen deduktiven Bestimmungen eine eigenartige Totalität gibt, mit der, wie man sagen kann, die formal-logische Idee einer « Welt überhaupt » konstruiert wird. Die « Mannigfaltigkeitslehre » im ausgezeichneten Sinn ist die universale Wissenschaft von den definiten Mannigfaltigkeiten ».

12 E. Husserl, *Logische Untersuchungen* I, op. cit., § 70 (« Erläuterungen zur Idee der reinen Mannigfaltigkeitslehre »), p. 250 : « Ein solches Gebiet nennt aber der Mathematiker (in seinem Kreise) eine Mannigfaltigkeit ».

13 La notion de « définitude » est ici centrale pour Husserl comme il le souligne entre autres dans ses *Idées* et dans sa *Logique formelle et transcendantale*. E. Husserl, *Gesammelte Werke. Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, erstes Buch, Band III/1. Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie, Den Haag, Martinus Nijhoff, 1976, p. 153 : « Vgl. Dazu « Log. Unters. » I, § 69 u. 70. - Die hier eingeführten Begriffe dienten mir schon zu Anfang der 90er Jahre (in den als Fortsetzung meiner « Philosophie der Arithmetik » gedachten « Untersuchungen zur Theorie der formal-mathematischen Disziplinen »), und zwar hauptsächlich zu dem Zwecke, für das Problem des Imaginären eine prinzipielle Lösung zu finden (vgl. den kurzen Hinweis « Log. Unters. » I, S. 250). In Vorlesungen und Übungen habe ich seitdem oft Gelegenheit gehabt, die bezüglichen Begriffe und Theorien, z. T. in voller Ausführlichkeit zu entwickeln, und im W.-S. 1901/02 behandelte ich dieselben in einem Doppelvortrag in der Göttinger « Mathematischen Gesellschaft ». Einzelnes aus diesem Gedankenkreis ist in die Literatur gedrungen, ohne dass die Ursprungsquelle genannt worden wäre. - Die nahe Beziehung des Begriffes der Definitheit zu dem

l'ancrage hilbertien ou quasi. À cet ensemble, il faudra rajouter la différence, introduite par Husserl, au sein de la multiplicité définie entre « multiplicité définie absolue » et « multiplicité définie relative », qui fait le départ entre la conception hilbertienne et la conception husserlienne.Voyons voir comment cette « multiplicité définie » se décline chez Husserl. Pour ce faire, il est intéressant de voir ce qu'il en dit dans ses *Recherches sur la théorie des disciplines mathématiques formelles*. Ces « *Recherches* » auxquelles Husserl fait ici allusion seront finalement publiées dans les *Husserliana*, en annexe à la *Philosophie der Arithmetik.* Pour ce qui nous concerne, nous nous concentrons ici sur l'appendice VI intitulé « Das Imaginäre in der Mathematik » (pp. 430-451). Cet appendice VI, qui va des pages 494 à 514 de la traduction française de Jacques English, est consacré, comme le titre l'indique, à l'imaginaire en mathématiques. La première référence qui vient sous la plume de Husserl, c'est Leibniz et le but qu'il a poursuivi : « … but que Leibniz avait déjà clairement conçu, c'est-à-dire du but d'une doctrine des théories (*Theorienlehre*) pure, indépendante de tout domaine particulier de connaissance, et, dans cette mesure, formelle » (p. 494). Ensuite vient la définition des mathématiques : « Les mathématiques sont donc, dans leur idée la plus haute, une doctrine des théories, la science la plus générale des systèmes déductifs possibles en général » (p. 495). Qu'est-ce qu'une théorie élaborée sur un mode systématique ? Elle est « définie par un ensemble d'axiomes formels, c'est-à-dire par un nombre limité de propositions fondamentales purement formelles, consistantes les unes avec les autres et indépendantes les unes des autres » (pp. 494-495). Comment est défini le domaine d'objets ? « … par les axiomes en ce sens qu'il est délimité en tant que sphère quelconque d'objets en général, peu importe qu'ils soient réels ou idéaux, pour lesquels sont valables des propositions fondamentales de telles et telles formes » (p. 495). Un tel domaine d'objets, nous l'appelons « multiplicité déterminée, mais définie formellement » (p. 495).

von D. Hilbert für die Grundlegung der Arithmetik eingeführten « Vollständigkeitsaxiom » wird jedem Mathematiker ohnes weiteres einleuchten ». E. Husserl : *Gesammelte Werke. Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*, Band XVII, Den Haag, Martinus Nijhoff, 1974, p. 101-102 : « Meine Fragen waren : an welchen Bedingungen hängt die Möglichkeit, in einem formal definierten deduktiven System (in einer formal definierten « Mannigfaltigkeit ») mit Begriffen frei zu operieren, die gemäss seiner Definition imaginär sind ? Wann kann man sicher sein, dass Deduktionen, die bei solchem Operieren von dem Imaginären freie Sätze liefern, in der Tat « richtig » sind, das ist korrekte Konsequenzen der definierenden Axiomenformen ? Wie weit reicht die Möglichkeit, eine « Mannigfaltigkeit », ein wohldefiniertes deduktives System zu « erweitern » in ein neues, dad das alte als « Teil » enthält ? Die Antwort lautet : wenn die Systeme « definit » sind, dann kann das Rechnen mit imaginären Begriffen nie zu Widersprüchen führen. Ausführlich beschrieben (ohne Beziehung auf diese Probleme) habe ich den Begriff des Definiten in meinen *Ideen*, S. 135 (nach einem Doppelvortrag in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft W.-S. 1901/02). Im I. Band der *Logischen Untersuchungen*, den ich eigentlich nur als Einleitung zu den phänomenologischen Untersuchungen des II. Bandes entworfen hatte, unterliess ich es, Fragen der Mannigfaltigkeitslehre, weiter zu verfolgen, und so fehlen die Beziehungen auf den Begriff des Definiten und auf das Imaginäre, das Abschlussthema meiner philosophisch-mathematischen Studien ».

Ces formes de théories, nous pouvons opérer sur elles : elles « peuvent être mises en rapport les unes avec les autres, (...) être classées, (...) on peut élargir et rétrécir de telles formes, (...) on peut mettre n'importe quelle forme donnée d'avance en relation... » (p. 495). Mais, précise Husserl, cette « généralisation » (*Verallgemeinerung*) amène avec elle tout un lot de problèmes non encore résolus. Ces problèmes sont des problèmes de méthodologie. D'autre part, quel est le but de tout cela ? Un but simplement formel ? Non pas, car « les mathématiques formelles veulent être l'instrument de découvertes mathématiques concrètes » (p. 495). Les nouvelles mathématiques formelles veulent apporter quelque chose de nouveau, quelque chose de plus : « Elles veulent produire des méthodes d'une généralité et d'une force incomparablement plus grandes, qui rendent superflus tous les travaux méthodologiques du genre mathématique réel » (p. 495).

Où se situent les difficultés ? Dans le rapport entre mathématiques formelles et leur application aux mathématiques réelles, aux domaines particuliers de connaissance (p. 496). Mais aussi : le développement des sciences montre que la non-clarté dans les questions de principes (*Unklarheit in den Prinzipien-Fragen*) « finit par se venger » (p. 496). Après que l'on ait escaladé certaines marches du progrès, le progrès ultérieur finit par être entravé (*gehemmt*) par des erreurs qui proviennent d'idées méthodologiques non-claires.

C'est à ce moment précis que Husserl aborde de front son objet : le problème de l'imaginaire dans le calcul (p. 496). Où s'est posé d'abord ce problème de l'imaginaire ? Dans la première forme historique des mathématiques pures, c'est-à-dire dans l'arithmétique, et tout particulièrement sous la forme de l'algèbre arithmétique. Il y a, dans le calcul algébrique, une tendance à la formalisation, cela est incontestable. Cette tendance a conduit à « des formes d'opération qui arithmétiquement n'avaient pas de sens (*sinnlos*), mais qui montraient la propriété étonnante de pouvoir être employées, malgré cela, dans les calculs (*trotzdem rechnerisch verarbeitet werden durften*)» (p. 496). Il s'est avéré que si le calcul était accompli mécaniquement (*wenn die Rechnung ... mechanisch durchgeführt wurde*), comme si tout avait un sens (*als ob alles sinnvoll wäre*), alors tout résultat de calcul libre d'imaginaires (*jedes Rechnungsresultat, das von den Imaginaritäten frei war*) pouvait être utilisé de façon juste.

Husserl prend ensuite soin de préciser dans une parenthèse le sens du terme « imaginaire » tel qu'il l'entend :

> « (Je comprends naturellement ici le terme « imaginaire » de la manière la plus large possible, selon laquelle le nombre négatif, et même le nombre frac-

> tionnaire, le nombre irrationnel, etc., peuvent valoir eux aussi comme imaginaires » (p. 496)[14].

On voit déjà ici, surtout si l'on suit la définition large de Husserl, la puissance de l'imaginaire dans le calcul. Une fois acceptée, car vérifiée mécaniquement, cette situation a conduit à une habitude : « l'habitude d'opérer librement avec l'imaginaire » (*Gewohnheit, mit dem Imaginären frei zu operieren*) (p. 496). Ce faisant, des règles d'opération ont été développées, mais le problème de l'imaginaire lui-même est resté sans solution (*das Problem des Imaginären selbst blieb dabei aber ungelöst*). Comment formuler au mieux ce problème de l'imaginaire ? Husserl s'y essaie en ces termes :

> « Soit donné un domaine d'objets, dans lequel, par la nature particulière des objets, sont déterminées des formes de jonction et de relation qui s'énoncent dans un certain système d'axiomes A. Sur le fondement de ce système, donc sur le fondement de la nature particulière des objets, certaines formes de jonction n'ont pas de signification réelle, c'est-à-dire que ce sont des formes de jonction qui sont absurdes (*widersinnig*). De quel droit ce qui est absurde peut-il être utilisé dans le calcul, de quel droit ce qui est absurde peut-il être employé dans la pensée déductive comme si c'était quelque chose de concordant ? Comment est-il possible d'expliquer qu'on puisse opérer avec ce qui est absurde selon des règles, et que, si ce qui est absurde se situe en dehors des propositions, les propositions obtenues soient justes ? » (pp. 496-497).

Husserl conclut ici que des considérations de logique générale ne sont ici d'aucune utilité, car les logiciens ont toujours insisté sur l'idée d'employer des concepts clairs. Même dans la preuve indirecte. Or, l'imaginaire est tout sauf clair, si l'on retient la clarté de la logique.

Dans un second moment, Husserl procède à une présentation de cinq théories de l'imaginaire : la première est celle de Bain et de Baumann, la seconde, celle de Boole ; la troisième, celle de Dedekind ; la quatrième, celle de Weierstrass et Cantor ; après avoir critiqué ces quatre théories, Husserl présente la sienne propre.

Comment entend-il la chose ? Husserl le dit : « nous nous élevons d'après le principe de la permanence au-dessus du domaine particulier, nous passons dans le formel, et là nous pouvons opérer librement avec racine de - 1 » (p. 501). Plus bas, il précise encore :

---

14 E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, *op. cit.*, p. 432-433 : « (Ich fasse hier natürlich den Titel « imaginär » möglichst weit, wonach auch das Negative, ja selbst die Brüche, die Irrational-Zahl und dgl. als imaginär gelten kann ».

> « Par imitation du procédé des mathématiques, on pourrait penser ceci : nous prenons les propositions fondamentales et les définitions des concepts dans un sens purement formel. Au lieu de partir du domaine réel, faisons totalement abstraction de celui-ci, et considérons les énoncés comme des définitions formelles d'un domaine en général, qui est défini précisément comme tel, auquel conviennent des énoncés de telle forme. Appelons D ce domaine. Alors, dans cette formalisation, à toute proposition déterminée par les propositions fondamentales du domaine réel correspondra une proposition dans le domaine formel et inversement. Le domaine formel aura les mêmes limites que le réel, limites qui sont préformées dans les axiomes. Représentons-nous maintenant le domaine formel élargi de telle façon qu'il n'ait plus ces limites, dans la mesure où cela est possible. Le concept de l'élargissement implique, si nous le rapportons aux axiomes, que les nouveaux axiomes englobent en même temps les anciens et que les nouveaux admettent en outre des cas d'opérations que les anciens excluent. On pourrait dire alors : une présupposition évidente de l'élargissement, c'est que le nouveau système d'axiomes soit en lui-même compatible » (pp. 501-502).

Ici, une difficulté est en outre soulevée par Husserl : « D'où savons-nous que ce qui n'est pas contradictoire est vrai aussi » (p. 502).

Dans un troisième moment, est défini le « passage par l'imaginaire » (p. 502). Comme on l'a dit plus haut, Husserl fait intervenir une distinction fondamentale, qui sépare sa conception de celle de Hilbert. Husserl fait le départ entre « défini de manière relative » et « défini de manière absolue » (p. 502). Les définitions qu'il donne de l'une et l'autre sont les suivantes : « Un système d'axiomes est « défini » de manière relative si toute proposition qui a un sens d'après lui est décidée dans la limitation au domaine de ce système » ; en revanche, « un système d'axiomes est « défini » d'une manière absolue si toute proposition qui a un sens d'après lui est décidée en général ».

Et Husserl de proposer le rapprochement de cette dernière proposition avec la théorie de Hilbert : « Donc est « défini » d'une manière absolue = complet au sens de Hilbert » (p. 503). On voit donc ici que le problème hilbertien de la complétude n'est pas tout à fait le problème husserlien. Nous verrons ce qu'il en est exactement un peu plus loin.

Husserl passe alors par l'exemple de l'arithmétique. On se souvient qu'il a écrit une *Philosophie de l'arithmétique*. Il s'inscrit par conséquent dans un triple mouvement d'arithmétisation (de l'algèbre, de l'analyse et de la logique) qui s'est développé au 19e et au début du 20e siècle. Husserl présente « le cas particulier de l'*arithmetica universalis* » (p. 503) en ces termes, puisque toute arithmétique est définie par un système d'axiomes (p. 505) :

> « pour l'arithmétique, le problème se résout ainsi : toute proposition qui se situe dans l'arithmétique étroite, mais qui est déduite sur le fondement de l'arithmétique large, est une équation. Or toute équation qui se situe dans l'arithmétique étroite, ou bien y est juste ou bien y est contradictoire ; une équation déduite dans le domaine large ne peut pas être contradictoire avec les axiomes du domaine étroit, autrement tout le reste du domaine serait inconsistant. Donc elle est juste » (p. 503).

De tout ceci, Husserl tire une loi générale :

> « … un passage par l'imaginaire est permis : 1) si l'imaginaire peut se définir formellement dans un vaste système de déduction consistant et si 2) le domaine de déduction originaire formalisé a pour propriété que toute proposition qui se situe dans ce domaine est ou bien vraie sur la base du fondement des axiomes de ce domaine, ou bien fausse sur la base de leur fondement, c'est-à-dire contradictoire avec les axiomes » (p. 503).

En conclusion, Husserl en arrive à dire que « le passage par l'imaginaire est donc lié à la condition de la définitude » (p. 506) et il rappelle, pour finir, la grande distinction qu'il a introduite entre définitude relative et définitude absolue : « On dit donc que tout système d'axiomes est complet d'une manière limitée si, en raison de ses définitions, il ne laisse ouvert aucun résultat possible d'opération. On dit qu'un système d'axiomes est complet d'une manière absolue s'il déploie la définition sur une telle étendue qu'absolument aucun résultat possible d'opération ne reste ouvert » (p. 506).

Il convient maintenant de tenter de ressaisir ce qui vient d'être présenté[15]. De quoi s'agit-il au juste ? Husserl poursuit en quelque sorte deux idéaux : le premier idéal est un idéal de catégoricité. Il s'agit dans ce cas de caractériser un domaine complètement. C'est une première exigence de complétude. Et puis il y a un second idéal, celui de complétude syntaxique. C'est la seconde exigence de complétude. La première vise à capturer la connexion et l'interconnexion des choses (*Sachen*) ; la seconde, à saisir la connexion et l'interconnexion des vérités (*Wahrheiten*). Le problème, évidemment, c'est

15 Nous nous appuyons ici sur l'article récent de M. Hartimo, « Husserl on Completeness, definitely », *Synthese*, 2018, 195.

que cette double poursuite mène à des incompatibilités. Les deux idéaux ne se superposent pas à l'identique. Ce problème du *Zusammenhang der Sachen* et du *Zusammenhang der Wahrheiten* a été présenté précocement par Husserl. Aux *Logische Untersuchungen* I très exactement. En effet, le § 62 de cet ouvrage est intitulé : « Die Einheit der Wissenschaft. Der Zusammenhang der Sachen und der Zusammenhang der Wahrheiten ». La bi-polarité husserlienne est donc en place très tôt.Dans un premier temps, Husserl s'est intéressé à la notion de « mulplicité définie » pour tenter de trouver une justification à l'introduction des nombres imaginaires dans le calcul. Cependant, assez rapidement, c'est aussi l'essence idéale de la théorie qui est interrogée par ce moyen. Par essence idéale de la théorie, il faut entendre : la science axiomatique ou « nomologique » (*Logische Untersuchungen* I, § 64)[16]. Ce *shift* est notable dès le *Doppelvortrag* (1901) quand Husserl présente la différence entre le travail du mathématicien et celui du philosophe. La seule présence de cette différence de point de vue dès le début du *Doppelvortrag* est un indice qui mérite d'être pris au sérieux, car elle introduit une bi-polarité qui va se réverbérer dans tout le texte husserlien et tout particulièrement – comment s'en étonner ? – dans la notion de définitude et de multiplicité définie. Cette notion va se décliner sous deux aspects car, on l'a dit, d'un côté, elle renvoie à une complétude du type de la catégoricité ; de l'autre, à une complétude de type syntaxique. De sorte qu'on a pu voir dans le texte de Husserl comme une oscillation entre une caractérisation sémantique et une caractérisation syntaxique de la définitude. Est-ce à dire qu'il y a là comme une hésitation, une ambiguïté ? À notre sens, cette oscillation[17] peut se laisser interpréter comme un effet lié à la manifestation d'une aporie fondatrice.[18]Une récapitulation s'impose. Si l'on définit un corpus logique pertinent pour la question du tiers, il est possible de découvrir un invariant dans les textes husserliens. Cet invariant, qui court des

---

16 Edmund Husserl : *Logische Untersuchungen* I, § 64, p. 236 : « Einer Anregung von J. von Kries folgend könnte man diese Wissenschaften fast ebenso charakteristisch als nomologische Wissenschaften bezeichnen, sofern sie im Gesetz das einigende Prinzip, wie das wesentliche Forschungsziel besitzen ». Et aussi p. 237 : « Jedenfalls ist es klar, dass die abstrakten oder nomologischen Wissenschaften die eigentlichen Grundwissenschaften sind, aus deren theoretischem Bestande die konkreten Wissenschaften alles das zu schöpfen haben, was sie zu Wissenschaften macht, nämlich das Theoretische ».

17 Cf. M. Hartimo, « On Completeness definitely », *op. cit.*, p. 1517-1518 : « ...this 'oscillation ' between syntactic and semantic definitions of definiteness is largely intentional on Husserl's part. It reflects the two sidedness of the idea of pure logic discussed in the *Prolegomena*. Whereas the syntactic notion above refers to the unity of the interconnection of truths, the semantic notion refers to the unity of the interconnection of things. The first one captures the idea that the theory decides all the sentences of the theory as true or false. The second refers to the uniqueness, or pureness, of the manifold and its exhaustive determination. In other words, Husserl's ideal is to have both deductive power as well as expressive power at once. Furthermore, (...), the expressive power is prior to deductive power of the theory, for one needs the axioms with which to capture the domain of the theory before one can examine what follows from them ».

18 Pour René Thom, toute science se fonde sur une aporie fondatrice. Cf. René Thom, « Thèmes de Holton et apories fondatrices », in *Apologie du logos*, Gallimard, 1990, p. 468-481.

années 1900 à 1936, c'est la notion de « multiplicité » (*Mannigfaltigkeit*) et, plus exactement, de « multiplicité définie » (*definite Mannigfaltigkeit*). Derrière cet invariant se profile, entre autres choses, la question du statut des imaginaires dans le calcul. Toute la question est maintenant de savoir comment interpréter cet invariant.

Pour ce faire, il nous faut prendre de la hauteur et, si cela se peut, adopter une position de surplomb. Dans sa *Philosophie der Arithmetik*, Husserl pose au chapitre XIII ce qu'il appelle « la tâche fondamentale première de l'arithmétique» (*Die erste Grundaufgabe der Arithmetik*), où il est question en tout premier lieu de la réduction (*Reduktion*)[19]. Selon un postulat arithmétique général obtenu par Husserl, il convient de réduire les diverses formations symboliques à leurs formes normales (*Normalformen*). De sorte que la tâche peut être convertie en deux opérations : une opération de séparation et une opération de réduction, où il s'agit de séparer (*sondern*) les types et trouver des méthodes de réduction (*Methoden jener Reduktion aufzufinden*). D'une certaine façon, il s'agit ici d'une forme de réécriture des formes les unes dans les autres, réécriture qui est obtenue par réduction syntaxique. Nous faisons ici allusion à la thèse de Okada[20], thèse selon laquelle il est possible d'interpréter l'approche de la multiplicité husserlienne de manière parfaitement cohérente, originale et moderne, et ce, en termes de réécriture (*Rewrite-Based Theory*)[21], et non plus, comme on le fait trop souvent, en alignant Husserl sur Hilbert. Ce qui permettrait de dire que, si Hilbert et Husserl affrontent bien le même problème, la complétude, la résolution du problème est quant à elle très différente chez l'un et l'autre : c'est que la complétude doit être entendue en termes de maximalité axiomatique chez Hilbert, mais de *minimalité algorithmique* chez Husserl[22], ce qui change tout. Nous avons insisté sur la nouveauté que représente l'interprétation en termes de réduction algorithmique minimale. Il faut rappeler ici que Hermann Weyl avait déjà dès

19 E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, *op. cit.*, chap. XIII, p. 262 : « Unsere letzte Untersuchung führte auf ein allgemeines arithmetisches Postulat : von den systematischen Zahlen sind verschiedene symbolische Bildungen, wo immer sie auftreten, auf die ihnen gleichwertigen systematischen als ihre Normalformen zu reduzieren. Demgemäss erwächst als die erste Grundaufgabe der Arithmetik, alle erdenklichen symbolischen Bildungsweisen von Zahlen in ihre verschiedenen Typen zu sondern und für einen jeden sichere und möglichst einfache Methoden jener Reduktion aufzufinden ».

20 M. Okada, «Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-Based Theory of Multiplicity », 24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA '13), Femke van Raamsdonk, 2013, pp. 4-19.

21 M. Okada, "Husserl and Hilbert on completeness…", op. cit., p. 17 : « The notion of multiplicity and that of definiteness of multiplicity are the key notions to understand the whole picture of Husserl's theory and his solution to the problem. (…) the notions are coherently understood by means of general term rewrite theory. In particular, a multiplicity is understood as relational-web (or tissue) where term rewrite proof-steps (moves) both of the closed terms level and general terms level are the basic part of the multiplicity-web. The definiteness corresponds to convergence of this part. (…) This tells that Husserl's view of axiomatic (arithmetical) systems was very much oriented by the computational view (...) ».

22M. Okada : *op. cit.*, p. 18 : « We characterized Hilbert's notion of completeness (of 1900) as the maximally expanded categorical model, while Husserl's notion of completeness as the minimal term model (...) ».

1940, dans son *Algebric Theory of Numbers*, attiré l'attention sur ce point. Mais cette interprétation est passée inaperçue. Pourtant, dans la tradition du 19e siècle, c'est-à-dire dans la tradition finitiste (Gauss, Kummer, Kronecker), l'algorithmique est très développée. Très développée, certes, mais trop développée sans doute. Comme l'a remarqué très justement Harold M. Edwards, l'*algorithmique* du 19e siècle est, parce que trop développée, largement *impraticable*[23] ; et ce, d'autant plus que les computers n'existaient pas encore, qui auraient permis de traiter toute cette algorithmique. D'où la réaction de Hilbert : contre le calcul, c'est-à-dire contre les calculs trop longs de Kummer et Kronecker, il faut jouer le concept pour faire court-circuit. Il se trouve qu'aujourd'hui la situation est très différente. Les computers existent, ce qui n'était pas le cas au 18e (Leibniz) et au 19e (Kummer, Kronecker). Depuis la seconde moitié du 20e, tous les longs calculs peuvent être traités en informatique pratique et théorique. Ce qui signifie, entre autres choses : d'une part, que la théorie de l'information accomplit le rêve leibnizien du « Calculemus » ; d'autre part, que l'avènement et la montée en puissance de l'informatique théorique ont créé un appel d'air pour les modèles finitistes ; toutefois il convient de ne pas oublier pour autant que ces modèles finitistes ne datent pas d'aujourd'hui : inventés à la fin du 19e (il n'est que de songer à Kronecker et sa réduction polynomiale, à Husserl et sa réduction syntaxique), ils ont été réactivés au 20e. Nous l'avons dit : la complétude doit être entendue en termes de *réduction*. C'est le premier point. Cette réduction doit être *algorithmique*. C'est le second point. Enfin, c'est le troisième et dernier point, la réduction algorithmique doit être *minimale*. Dans cette perspective, trois articles ont paru ces dernières années qui changent la donne interprétative, en sens qu'ils attirent l'attention et mettent l'accent sur la réduction algorithmique présente chez Husserl.[24]Ces articles témoignent d'une grande avancée quant à la compréhension du statut de la *definite Mannigfaltigkeit*. Cette avancée incontestable dans l'interprétation des textes mathématiques de Husserl met en avant la théorie algorithmique mise en œuvre chez lui. Laquelle est interprétée en termes de réduction algorithmique minimale et de réécriture (*Rewrite-Based Theory*). Pourtant, il convient de noter aussi que l'algorithmique ainsi manifestée est une algorithmique issue de la logique linéaire. En effet, sous cette hypothèse,

23 H. M. Edwards : « Galois's mathematics, like Kronecker's, was algorithmic, but not practical. That is why it is not surprising that all of this algorithmic mathematics (we could call it *impractical algorithmic mathematics*) was developed at a time when computers didn't exist », in : « Kronecker's Algorithmic Mathematics », Talk 2008, p. 5 (souligné par nous).

24 M. Okada, «Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-Based Theory of Multiplicity », 24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA '13), Femke van Raamsdonk, 2013, pp. 4-19 ; Hartimo et Okada, « Syntactic Reduction in Husserl's early Phenomenology of Arithmetic », *Synthese*, 2016, vol. 193, pp. 937-969 ; M. Hartimo, « Husserl on Completeness, definitely », *Synthese*, 2018, 195, pp. 1509-1527.

nous évoluons à l'intérieur d'une logique qui fait intervenir la modalité et la nécessité. Autrement dit, cette logique linéaire fait, certes, référence à une syntaxe, mais une syntaxe envahie par une sémantique sous-jacente liée précisément aux notions de modalité et de nécessité.

D'où la question : peut-on, pourrait-on aller plus loin ? Autrement dit : pourrait-on être plus radical encore et se passer de la modalité et de la nécessité ? Pourrait-on faire l'économie de la modalité ou bien est-elle un chemin obligé ?

3. La question du tiers à l'épreuve des mathématiques finitaires et infinitaires

Husserl définit, dans un style monadologique qui rappelle la *mathesis universalis* de Leibniz, l'arithmétique comme une théorie des multiplicités définies formellement. À ce titre, elle présuppose une pratique de réduction, et, plus précisément, de réduction algorithmique. Si pour Gödel, l'axiomatisation, la réduction des mathématiques à des éléments finis, est incomplète au sens où elle conduit à des indécidables, pour Husserl l'arithmétique à tout niveau est incomplète, car pour chaque multiplicité définie, il y a une réduction algorithmique qui est en jeu. L'incomplétude est ainsi généralisée, là où chez Gödel elle était régionalisée dans les limites d'un domaine de signification propre à l'algèbre finitaire.

La perspective de Husserl peut s'inscrire en fait dans une généalogie de la logique linéaire qui est finitaire au sens où il n'est pas fait droit à l'infini comme élément mathématique valide. Chez Husserl, la syntaxe formelle de sa logique est imprégnée d'une sémantique liée aux modalités aléthiques que sont le possible et le nécessaire. Mais il est tout à fait possible de se passer de la modalité. C'est la raison pour laquelle nous empruntons à Yvon Gauthier sa généalogie de la logique mathématique[25] - généalogie originale, et, à nos yeux, pertinente en ce sens qu'elle restitue à sa juste place les travaux du mathématicien Leopold Kronecker (1823-1891) et sa démarche finitaire, à la suite de Fermat, Gauss, etc. Cette restitution permet de sortir d'une approche inchoative, de lire de façon inédite les débats sur le statut du fini et de l'infini en logique et mathématiques (en particulier, les positions respectives de Hilbert et de Husserl) et de procéder à une remise en ordre du paysage général, à partir du point de vue finitiste précisons-le. Cette remise en ordre permet, à notre sens, de mieux repenser le problème du tiers exclu.En

25 Nous avons consulté les ouvrages suivants : Yvon Gauthier : *De la logique interne*, Vrin, coll. Mathesis, 1991 ; *Logique interne. Modèles et applications*, Diderot/Modulo, 1997 ; *La logique du contenu. Sur la logique interne*, Paris, L'Harmattan, 2004 ; *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, Montréal, Presses de l'Université de Laval, 2010. Il existe une synthèse de ses travaux en anglais : *Towards an Arithmetical Logic. The Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser, Springer, 2015.

effet, pour dépasser la logique algorithmique linéaire mentionnée plus haut, Yvon Gauthier rappelle à juste titre la double arithmétisation de l'algèbre et de l'analyse au 19ᵉ, et introduit les tentatives d'arithmétisation de la logique au 19ᵉ, avec Hilbert et Gödel notamment. Et pour ce faire, il lit le mouvement à l'envers : non plus de Kronecker à Hilbert, mais de Hilbert vers Kronecker. C'est-à-dire qu'il fait retour au mouvement que Kronecker a instauré dans ses *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* de 1882, pour réduire l'algèbre à l'arithmétique. Notons bien que cette réduction n'est pas une simple réduction ; c'est une réduction qui se double tout aussitôt d'une extension, d'un élargissement (*Erweiterung*). Le double mouvement, c'est là toute l'originalité de Kronecker.

Soyons plus précis : le premier mouvement est un mouvement de *réduction* polynomiale ; le second mouvement est un mouvement d'*extension* sur les indéterminées (*indeterminae* de Gauss, *Unbestimmte* de Kronecker).

Un mot supplémentaire sur Kronecker. Son *Allgemeine Arithmetik* repose sur une traduction et une réduction polynomiale. Or c'est cette expression de *Allgemeine Arithmetik* que Husserl va reprendre dans sa *Philosophie der Arithmetik*. De sorte que :

> « (…) nous retrouvons dans sa pureté (i.e. auto-consistance) l'arithmétique telle qu'en elle-même l'ont conçue Fermat, Gauss, Kronecker et leurs héritiers. La polynomie (la division multiple) a engendré la « multiplicitas », la multiplicité qui a donné « manifold » en anglais et en allemand « Mannigfaltigkeit », multiplicité ou variété qui a engendré à son tour les espaces de Riemann, la théorie de l'extension de Grassmann et les ensembles que Cantor avait d'abord appelés multiplicités. Husserl voudra faire de sa « Mannigfaltigkeitslehre » la théorie de toutes les théories déductives »[26].

Tout l'enjeu du « tertium » (et c'est ce qui n'apparaît pas toujours immédiatement chez Husserl) est bien là et nulle part ailleurs : il y va des mathématiques infinitaires (Cantor) *versus* les mathématiques finitaires (Kronecker)[27]. Et entre les deux, posté à l'interface du fini et de l'infini : Hilbert. Toute la question revient donc à savoir comment Husserl se situe dans ce contexte, entre le fini de Kronecker, l'infini de Cantor, et l'entre-deux de Hilbert[28]. Prend-il parti pour l'un (fini), pour l'autre (infini), ou pour le mixte ? Où se situe-t-il ailleurs ? Après ce qui vient d'être dit, on peut affirmer que c'est dans ce contexte

26 Y. Gauthier, *Logique interne. Modèles et applications*, *op. cit.*, 1997, p. 196.
27 En bref, Cantor pense qu'on peut envisager l'infini comme une entité, de sorte qu'on puisse affirmer qu'il y a une infinité d'infinis. Kronecker pense, quant à lui, que seules les entités finies peuvent être considérées comme des entités mathématiques. On parle alors de mathématiques finitaires.
28 Cf. D. Hilbert : « Über das Unendliche », *Mathematische Annalen*, 1926, vol. 95, p. 161-190.

de triple arithmétisation, d'une part, et d'irruption infinitaire (irruption de l'infini actuel cantorien), de l'autre, que surgit la problématique moderne du tiers exclu. Si la problématique moderne est incontestablement marquée par l'œuvre de Brouwer[29] et, plus généralement, par l'intuitionnisme[30] qui est venu ébranler tout un ensemble bien institué, où les principes de la logique classique bivalente avaient force de loi dans toute l'étendue de l'encyclopédie, il convient de ne pas oublier pour autant que cet ébranlement du principe de tiers exclu, provoqué par l'intuitionnisme au début du 19e siècle, repose lui-même sur un socle plus stable et plus ancien : le mouvement d'arithmétisation triple dont nous avons parlé, et en particulier l'arithmétisation par traduction et réduction polynomiale (Kronecker, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*). C'est, au fond, *ce mouvement de réduction finitiste* qui *fait surgir le questionnement sur le tiers exclu et l'omniscience logique*.En fait, même s'il découvre Cantor à Halle, la formation de Husserl auprès des trois grands mathématiciens que sont Kummer, Kronecker et Weierstrass est une formation de type finitiste[31]. Qui plus est, Husserl a écrit une *Philosophie de l'arithmétique*. Il s'inscrit donc dans cette grande vague d'arithmétisation de l'algèbre, de l'analyse et de la logique que la vague infinitaire cantorienne viendra contrecarrer et déplacer. D'où la crise des fondements qui s'ensuit. Toujours dans le même esprit : le type de mathématiques, le type de réécriture que tente de promouvoir Husserl est basé sur la réduction syntaxique - qui fait écho à la réduction polynomiale de Kronecker. Dans son *Doppelvortrag* de 1901, quand il aborde le statut des multiplicités « définies », c'est par le biais de leur réductibilité syntaxique. Grand admirateur de Leibniz et de la *mathesis universalis*, il pense en termes de computation, comment s'en éton-

---

29 Au début des années 20, Brouwer publie sa fameuse conférence de 1923 contre le tiers exclu (« Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie », *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 154, 1924, pp. 1–7), laquelle avait été anticipée par un article de 1908 (« De onbetrouwbaarheid der logische principes »). Il existe plusieurs traductions françaises de ce premier texte. L. E. J. Brouwer, « Les principes logiques ne sont pas sûrs » (trad. Bouveresse), in : François Rivenc et Philippe de Rouilhan (dir.) : *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850 – 1914)*, Payot, 1992, p. 379-392. Voir aussi : L. E. J. Brouwer, « Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques », in : J. Largeault : *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, textes réunis, traduits et présentés par J.L., Vrin, 1992, p. 15-23.

30 Cf. A. Heyting : *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars/E. Nauwelaerts, 1955. Notons qu'on peut également citer aux côtés de Brouwer et de Heyting, l'importance de Kolmogorov et son article de 1925. Cf. Jean van Heijenoort : *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1971.

31 On trouvera les références des cours suivis par Husserl auprès de Kronecker et Weierstrass in : E. Husserl : *Gesammelte Werke. Philosophie der Arithmetik*, *op. cit.* p. 20. Rappelons que Husserl a soutenu sa thèse de mathématiques : *Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung* (Wien, 1882), sur le calcul des variations. Il a été l'assistant de Weierstrass à Berlin durant le semestre d'été de 1883 (il fait cours sur la théorie des fonctions abéliennes). Il revient ensuite à Vienne où il étudie la philosophie auprès de Brentano de 1884 à 1886. Son habilitation, auprès de Carl Stumpf, porte sur la notion de nombre : *Über den Begriff der Zahl. Psychologische Analysen* (Halle, 1887). Il arrive à Göttingen en 1901, où il sera proche de Felix Klein et David Hilbert.

ner ? Qui pense en termes de computation, ne peut manquer de penser en termes finitistes. De sorte que poser la question du tiers exclu, c'est poser inévitablement celle de l'omniscience logique[32]. Car dans tous les cas où le tiers est recevable, l'omniscience est présupposée ; et si le tiers est, ici ou là, non-recevable l'omniscience est repoussée d'autant et frappée de « confusion » (pour parler comme Leibniz). La perspective de Husserl fait que, pour lui, le tiers exclu n'est pas universellement valable ; il y a dans chaque opération mathématique l'irruption d'un tiers possible qu'il s'agit de réduire syntaxiquement pour le faire entrer dans un système arithmétique qui organiserait les multiplicités définies formellement de façon nécessaire. En fait, l'omniscience des mathématiques est "confuse" au sens où elle peut faire obstacle à une réduction. Il n'y a donc pas besoin de faire appel aux modalités aléthiques pour montrer comment le devenir de la logique linéaire dans les mathématiques conduit à une relativisation du tiers.

Toute autre est la perspective dans le cadre des mathématiques infinitaires, lancée par Cantor[33]. C'est dans cette perspective que vient s'inscrire, pour partie, Gödel. C'est en 1959 que ce dernier a commencé à étudier Husserl[34]. En fait, c'est la recherche d'une nouvelle façon de faire de la philosophie qui a initié sa lecture de Husserl. De Husserl, il va retenir, bien entendu, la réflexion sur la monadologie issue de Leibniz[35]. Mais aussi et surtout que la phénoménologie pourrait bien être une bonne méthode pour la philosophie (p. 61). Sans doute y voyait-il la promesse d'une élucidation de la question de la réalité objective des concepts et de leurs relations. Autrement dit, c'est la question du platonisme ou du réalisme conceptuel qui l'occupe encore et toujours. Pour Gödel, la phénoménologie était une façon de développer et de fonder son platonisme qui était, d'après lui, la perspective juste, la vue juste, bien que le platonisme soit, en sens aussi, réducteur, mais d'une réduction acceptable parce qu'il s'agit là d'une réduction à l'universel (pp. 326-327).

---

32 Cf ; sur ce point E. Bishop : *Foundations of Constructive Analysis*, Mc Graw Hill, 1967 ; R. Parikh : « Logical Omniscience », in : *Logic and Computational Complexity*, ed. By D. Leivant, Lectures Notes in Computer Science, Springer, 1995, p. 22-29.

33 Contre la position cantorienne, il convient de rappeler, outre la position intuitionniste de Brouwer, la position semi-intuitionniste de Henri Poincaré, qui aura cette formule définitive : « *Il n'y a pas d'infini actuel* ; les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction », in : «Les mathématiques et la logique », *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1906, p. 316.

34 Dans son livre : *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy* le logicien et mathématicien Hao Wang, confident de Gödel, nous livre les points essentiels de la réflexion gödelienne sur Leibniz, Husserl et le sujet qui nous occupe : la loi du tiers exclu Cf. H. Wang : *A logical Journey. From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1996. Les passages les plus importants sont cités en notes en anglais ; pour les autres passages, la pagination est indiquée dans le texte entre parenthèses.

35 Gödel essaie d'ailleurs de promouvoir une monadologie scientifique et métaphysique. Wang écrit ainsi « Gödel did tell me that his general philosophical theory is a Leibnizian monadology with the central monad (namely God), although , he also stressed, Leibniz had not worked out the theory » (p. 87).

De ce point de vue, on comprend qu'il n'était pas du tout satisfait par le dualisme kantien et par sa restriction de l'intuition à l'intuition sensible. En effet, accepter cette restriction, c'est mettre hors-jeu un autre type d'intuition : l'intuition catégoriale (p. 164). Il a donc été amené à s'intéresser à l'intuition catégoriale, telle qu'elle a été abordée dans la dernière partie des *Recherches logiques* (cf. sixième *Recherche*) (pp. 80-81). C'est dans ce contexte que Gödel a été amené à recommander à plusieurs logiciens de sa connaissance de lire Husserl, et tout particulièrement sa sixième *Recherche*. Gödel a avancé l 'idée selon laquelle Husserl aurait, entre 1905 et 1910, atteint une sorte d'illumination (p. 293).

En fait, l'intuition catégoriale qui permet de s'émanciper de l'intuition sensible est un processus d'idéalisation que Gödel étend de façon à faire des mathématiques dans un cadre infinitaire. Ce faisant, il étend l'intuition syntaxique husserlienne à l'infini mathématique et élève les mathématiques, sur le plan de l'épistémologie, à un niveau d'omniscience. Ce problème de l' « omniscience » est un problème récurrent depuis Brouwer au moins, en ce sens qu'il sera formulé à nouveau expressément chez les logiciens et mathématiciens contemporains, chez Bishop et Parikh en particulier. Dans cette perspective, le tiers exclu peut non seulement être rapproché d'une procédure d'omniscience ; le tiers exclu est une procédure d'omniscience. Par l'acceptation du principe de tiers exclu, en effet, nous faisons comme si l'infini était en notre maîtrise parfaite. Ce contre quoi s'était dressé Brouwer dès 1908.

C'est pourquoi Leibniz avait pris grand soin de rajouter un élément de contre-balancement à cette procédure infinitaire. Il avait rajouté : omniscient, certes, mais confusément. C'est ce « confusément » qui permet de faire la différence, et de ré-instaurer une oscillation, un balancement, un battement. Qui autrement aurait disparu purement et simplement.

Dans une perspective finitiste et dans la logique intuitionniste, on veut montrer comment se construisent les mathématiques, mais si l'on étend l'idéalisation et la généralisation à son maximum, alors on peut partir d'un horizon non construit, d'un élément quasi-théologique (ce qui sera particulièrement le cas chez Cantor), qui confère aux mathématiques un pouvoir de connaissance infini. Parlant de Hilbert, Gödel explique d'où vient l'erreur de ce dernier, et son échec : il croyait que la métamathématique non constructive n'est d'aucune utilité[36]. Le jugement de Gödel est abrupt, en ce sens qu'il ne

36 H. Wang, *A Logical Journey*, *op. cit.*, p. 250 : « Hilbert was not a constructivist in the sense of totally rejecting nonconstructive proofs. His error consists in his view that nonconstructive metamathematics is of no use. Hence he expected that is constructive metamathematics would lead to the solution of the problem ».

tient compte que du dernier Hilbert. Il faudrait sans doute un peu relativiser, puisqu'en fait Hilbert oscillait lui-même entre le « paradis cantorien » et une position finitiste (*finite Einstellung*). Cette dernière position n'a été reconquise que sur le tard. Gödel donne, pour finir, un exemple de la pratique qu'il a développée, où tantôt le fini, tantôt l'infini sont mobilisés tour à tour, sans exclusive : sa preuve de consistance pour l'hypothèse du continu. Il explique qu'il a dû inventer une hiérarchie ramifiée expressément pour des buts constructivistes (*constructivistic purposes*) mais utilisée d'une manière entièrement non constructive (*nonconstructive way*)[37]. De sorte que l'on peut tirer une conclusion plus générale, comme le fait Hao Wang, sur « notre liberté relative de choisir entre des mathématiques constructives et classiques, avec leurs différents degrés de clarté et de certitude »[38].Quelle est la place de la loi du tiers exclu dans ce contexte ? D'après ce qui vient d'être dit, on peut le deviner aisément. Le tiers exclu est, pour Gödel, une procédure de généralisation infinitaire. Reprenons quelques indications plus précises données par Gödel, selon Hao Wang.

Il y a en fait, pour Gödel, qui creuse l'idée d'idéalité platonicienne et husserlienne[39], une inclination naturelle qui nous fait sauter du fini vers l'infini : c'est le « grand saut » (*big jump*). Précisément, l'acceptation ou l'application de la loi du tiers exclu en tous domaines et en toutes occasions peut être assimilée à un « big jump ». Or ce « big jump », on le sait, est une idéalisation[40]. On pourrait même rajouter, dans un esprit intuitionniste, une idéalisation maximum qui confine à l'omniscience. En effet, si l'on accepte le « big jump » du tiers exclu, c'est tous les autres « jumps », toutes les autres idéalisations qui devront être acceptées[41].Comme le dit Hao Wang, d'autres exemples centraux de notre idéalisation incluent la loi du tiers, tout nombre naturel, les nombres réels et les ensembles arbitraires. Comme le dit Gödel, « nous idéalisons en ne tenant pas compte de l'imprécision dans ce qui est actuel (…). Les nombres réels sont une idéalisation des ensembles et des séquences finis. La loi du tiers exclu est quelque chose que nous imagi-

---

37 *Ibid.*, p. 219 : « However, as far as, in particular, the continuum hypothesis is concerned, there was a special obstacle which really made it practically impossible for constructivists to discover my consistency proof. It is the fact that the ramified (predicative) hierarchy, which had been invented expressly for constructivistic purposes, has been used in an entirely nonconstructive way ».

38 *Ibid.*, p. 210 : « our relative freedom to choose between constructive and classical mathematics, with their different degrees of clarity and certainty ».

39 Rappelons que le platonisme mathématique de Husserl est issu de sa lecture de Lotze. Sur ce point, voir E. Husserl : *Logische Untersuchungen. Ergänzungsband. Erster Teil*, Husserliana XX, 1, New York, Springer, 2002, p. 297.

40 Ibid., p. 217 : « I have mentioned the natural inclination that leads us to take the big jump from the finite to the infinite. This big jump, like the law of excluded middle, is an idealization ».

41 *Ibid.,* p. 217 : « Once we are willing to take this jump, it becomes difficult to argue against taking other jumps or making other idealizations ».

nons afin d'augmenter notre capacité »[42]. Augmenter jusqu'où ? Jusqu'à l'infini, jusqu'à l'omniscience. Pourtant il peut y avoir restriction de l'idéalisation, si l'on passe du concept de réel (où la loi du tiers exclu vaut) au concept de connaissable (*knowable*). Dans ce dernier cas, il est possible de se demander si les deux principes (non-contradiction et tiers exclu) demeurent vrais pour toute proposition. Par exemple, il se peut que le principe du tiers exclu demeure vrai pour toutes les propositions simples, mais non pour toutes les propositions complexes[43]. En ce sens, « l'objectivité est une bifurcation du réel »[44]. C'est-à-dire que l'objectivité requiert seulement une bifurcation des propositions entre vrai et faux, selon la loi du tiers exclu. Ces remarques de Gödel sur le tiers débouchent, bien entendu, sur une réflexion plus générale sur le platonisme et l'objectivité des mathématiques. Tandis que le platonisme implique la croyance en une réalité objective des objets et des concepts mathématiques, l'objectivité met l'accent sur le fait que les propositions tenues à leur propos sont soit vraies soit fausses. L'objectivité dans un domaine est la croyance que chaque proposition en lui est soit vraie soit fausse. Le point crucial pour Gödel étant qu'il y ait bien objectivité dans les mathématiques (p. 209).On voit alors que suivant le cadre adopté, finitaire ou infinitaire, le tiers exclu ne joue pas le même rôle. Dans le cadre finitiste, il est ce qui, en étant rejeté, dessine les limites du fondement des mathématiques (laquelle présuppose une réduction algorithmique) qui entache l'omniscience de la *mathesis universalis* d'un certain degré de confusion. Dans le cadre infinitaire, il est un vecteur d'idéalisation et de généralisation.

42 *Ibid.*, p. 301 : « In the description of the way we envisage what could be done we idealize by disregarding the imprecision in what is actual (...). Real numbers are an idealization of the finite sets and sequences. The law of excluded middle is something we imagine in order to increase our capability ».
43 *Ibid.*, p. 359 : « If we choose to replace the concept of the real by the concept of the knowable, wether the two principles (of non contradiction and of excluded middle) remain true for all propositions. For instance, it may be that the principle of excluded middle remains true for all simple (in one sense or another) propositions but not for all complex propositions. It may be that, for certain propositions p, neither p nor non-p is knowable ; this is Brouwer's position with regard to mathematical propositions ».
44 *Ibid.*, p. 303 : « Objectivity is a bifurcation of the real ».

4. Conclusion

Dans le premier point, nous nous sommes contentés de mettre en place[45] le problème du tiers exclu tel qu'il se présentait à la fin du XVIIe siècle et au début du XVIIIe siècle chez Leibniz. Pour ce faire, nous avons choisi de suivre l'article de Paul Schrecker. Cet article, daté de 1935 il est vrai, constitue cependant un point de départ, sans cesse réactivé par les commentateurs ultérieurs. De plus, il présente à nos yeux un double avantage : outre le fait qu'il développe la problématique du tiers chez Leibniz, il transporte aussi, en une sorte de court-circuit, les échos leibniziens du problème au cœur même de la crise des fondements en logique et mathématiques, crise qui a éclaté au début du 19e siècle et qui constitue le contexte des écrits de Husserl qui nous intéressent. Dans ce premier point, deux problèmes sont soulevés : le principe du tiers obéit-il à une restriction ? C'est-à-dire : a-t-il un domaine de validité ? Et si oui, quel est le domaine de validité du principe ? D'autre part, et plus généralement : si tout esprit est omniscient, encore convient-il de déterminer si l'omniscience peut-elle être dite claire ou bien confuse.

Si omniscience confuse il y a, alors le tiers voit son domaine d'applicabilité réduit ce qui nous conduit à la question de la complétude des systèmes mathématiques. Notre thèse est alors que ce problème est lu par Husserl comme posant la question de la réduction algorithmique. En inscrivant les multiplicités définies de Husserl dans le sillage de la monadologie leibnizienne, il est possible de penser Husserl comme constituant une alternative à Hilbert et comme dégageant des enjeux originaux sur la question du tiers.

Pour ce faire, nous avons relevé dans *Logique formelle et logique transcendantale* (1929), un certain nombre de passages se rapportant directement au « tiers » et nous les avons contextualisés autour de l'appareil conceptuel que Husserl utilise invariablement dans ses écrits qui courent de 1900 à 1936, à savoir les notions de *mathesis universalis*, de « multiplicités » (*Mannigfaltigkeiten*) et, pour finir, de « multiplicités définies » (*definite Mannigfaltigkeiten*), sa découverte originale. À la lecture de tous les éléments rassemblés, la question n'a pas manqué de se poser *in fine* : Le principe du tiers exclu a-t-il bien pour enjeu la complétude d'un système, comme on le croit souvent et comme le

45 Il s'est agi dans cette première partie d'une simple installation du problème, rien de plus. Il faudrait pour bien faire pouvoir intégrer les travaux fondamentaux récents sur Leibniz. Nous songeons en particulier à l'ouvrage fondamental de Michel Fichant : *Science et métaphysique en Descartes et Leibniz*, P.U.F., 1998, ainsi qu'à son édition de la *Monadologie* : Leibniz : *Discours de métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, édition, traduction et notes de Michel Fichant, Folio, Gallimard, 2004. Nous y avons renoncé ici, faute de place. Notre choix s'est focalisé préférentiellement sur l'article de Paul Schrecker, daté il est vrai (1935), mais qui présente le double avantage de faire dialoguer déjà Leibniz avec la logique mathématique de l'époque, d'une part, et, d'autre part, d'entrer en résonance directe avec les travaux de Poincaré, Hilbert, Weyl, etc. Dans la mesure où nous suivons pas à pas l'article de Schrecker, nous n'avons pas non plus cité l'édition de l'*Akademie-Ausgabe* qui fait autorité aujourd'hui.

voulait Hilbert ? Ou bien vise-t-il à tout autre chose : à la réduction algorithmique d'un système, par exemple ? On a alors tenté d'apporter une réponse à cette question, en montrant que si Hilbert et Husserl affrontent bel et bien le problème de la complétude, ils ne le posent pas de la même façon. Alors que la complétude doit être comprise en termes de maximalité axiomatique chez Hilbert, elle doit être entendue comme *minimalité algorithmique* chez Husserl.

Pour prolonger notre questionnement, nous avons dégagé le contexte finitiste de la logique husserlienne et nous l'avons fait contraster avec le cadre gödelien de la logique. Dans la logique de Gödel, le problème du tiers s'est quelque peu déplacé. D'où la question qui s'est posée : relève-t-il encore de la réduction algorithmique, ou bien relève-t-il d'autres procédés ? Nous avons alors montré que Gödel met en avant, ici et là, des procédures qui sont autant de procédures de généralisation et d'idéalisation. Nous avons montré également comment le principe du tiers exclu recouvrait dans ce cadre un sens opératoire conduisant à une omniscience intégrale.