Lewis et la fondation méréologique des mathématiques

Sébastien Richard*
(F.R.S.-F.N.R.S./Université libre de Bruxelles)

Une certaine *doxa* voudrait que la *méréologie formelle*, développée dans les années 1910 indépendamment par Whitehead et par Leśniewski, aille main dans la main avec un certain type de *nominalisme* : celui qui considère que tout système formel permettant de générer des classes devrait être interdit. À l'infinité des classes abstraites qui occupent les différents échelons de la hiérarchie ensembliste, la méréologique opposerait un nombre limité – par rapport au domaine de discours – d'entités concrètes : les *sommes* ou *fusions* méréologiques. La méréologie et la théorie des ensembles seraient alors deux théories formelles concurrentes et métaphysiquement incompatibles, la seconde étant en proie à un platonisme exubérant, là où la première adopterait plutôt un ascétisme ontologique de bon aloi.

La publication, en 1991, de *Parts of Classes* nous a obligés à réévaluer en profondeur cette manière de concevoir les relations entre méréologie formelle et théorie des ensembles. Ce que nous propose David Lewis dans ce petit ouvrage, dense et provocant, ce n'est rien moins que d'appliquer la méréologie formelle à la théorie des ensembles afin d'en isoler la partie la plus irréductiblement ensembliste.

Nous voudrions analyser ici cette *méréologisation* de la théorie des ensembles, privilégiant les aspects méréologiques et métaphysiques, au détriment des aspects plus mathématiques[1]. Notre but est plus particulièrement de montrer que, au-delà de l'incontestable réussite technique de l'entreprise lewisienne, celle-ci laisse un certain nombre de questions philosophiques fondamentales sans réponses ou que, lorsqu'elle tente d'en offrir, ces réponses sont tout à fait insatisfaisantes.

---

* Sébastien Richard est chargé de recherches du FNRS auprès de l'Université libre de Bruxelles et de la New York University. Il est spécialiste de la tradition philosophique austro-polonaise, de métaphysique et de logique. Il est l'auteur de *De la forme à l'être : Sur la genèse philosophique du projet husserlien d'ontologie formelle*, aux Éditions d'Ithaque, 2014.

[1] Nous n'aborderons pas non plus les améliorations techniques que Lewis a ajoutées à la première version de son système, d'une part dans l'annexe à *Parts of Classes* (Burgess, Hazen et Lewis, 1991) et, d'autre part, dans Lewis (1993).

I. Théorie des ensembles *vs* méréologie

Dans ses « Podstawy ogólnej teorii mnogości. I » (*Fondements de la théorie des ensembles*. I) de 1916, le logicien polonais Stanisław Leśniewski avait pour ambition de formuler une théorie qui puisse écarter les « antinomies » de la théorie générale des ensembles, « sans réduire le domaine originel du terme ensemble de Cantor » (Leśniewski 1916, p. 5), et soit en accord avec les « intuitions du “commun” » (*intuicje « ogółu »*). Une théorie de ce type s'opposerait alors aux théories des ensembles axiomatisées par Zermelo et par Russell. Celles-ci sont en désaccord avec les intuitions du commun, en particulier parce qu'elles autorisent la formation d'ensembles ou classes (nous ne distinguons pas ces deux notions à ce stade) – qu'on appelle généralement « singletons » – qui ne possèdent qu'un seul élément, mais sont pourtant différents de cet unique élément. Le problème[2] est qu'une classe est, selon la définition de Cantor, « toute pluralité [*jedes Viele*], qui peut être pensée comme une, c'est-à-dire toute totalité d'éléments définis qui peuvent être combinés en un tout au moyen d'une loi » (Cantor 1883, p. 204) et qu'un singleton ne *rassemble*, *combine*, ou *met ensemble*, qu'un seul élément, et non une pluralité. Mais quel sens peut-il y avoir à dire que nous rassemblons un seul élément en un tout, et qui plus est que la totalité qui en résulte est différente de son unique élément ?

L'idée selon laquelle les classes sont des entités créées par le rassemblement de divers objets est encore plus problématique lorsque nous envisageons la *classe vide*. Comment en ne rassemblant rien du tout pourrions-nous en effet générer quelque chose ? Ou encore, comme se le demandait déjà Frege en 1895, si une classe se compose d'objets, comment pourrait-elle continuer à exister lorsque tous les éléments qui la composent ont eux-mêmes disparu ? Lorsque nous brûlons tous les arbres de la forêt ne brûlons-nous pas du même coup la forêt[3] ?

La conception ensembliste des classes est donc intuitivement insatisfaisante et il conviendrait de la remplacer. C'est du moins ce que pensait Leśniewski. D'après ce que nous venons de dire, la nouvelle conception des classes devrait au moins répondre aux deux principes suivants[4] :

---

[2] *Cf.* Lewis (1991, pp. 29 *sq*.)

[3] Zermelo (*cf.* l'axiome II sur les « ensembles élémentaires » [*Elementarmengen*] in Zermelo 1908, p. 263) parlait de l'ensemble vide comme d'un ensemble « impropre » (*uneigentlich*), ce qui montre bien son caractère ontologiquement problématique.

[4] *Cf.* les propositions (1) et (3) in Leśniewski (1989 [1927-1931], pp. 49-50).

(1) si un objet est la classe des *F*s, alors un objet est *F* ;

(2) si un et un seul objet est *F*, alors cet objet est la classe des *F*s.

Le premier principe nous dit qu'il n'y a pas de classe vide et le deuxième qu'une classe ne contenant qu'un seul élément ne se distingue pas de celui-ci. Les classes qui résultent de ces deux principes peuvent être dites « collectives », par opposition aux classes « distributives » de la théorie des ensembles de Zermelo et de Russell. La théorie générale des classes collectives est en fait une *méréologie*, c'est-à-dire une théorie des touts et des parties. Cela se reflète en particulier dans le troisième principe auquel sont censées répondre les classes collectives selon Leśniewski[5] :

(3) tel ou tel objet peut être la classe de tels et tels objets et être en même temps la classe d'objets tout à fait différents.

Ce qu'il faut comprendre, c'est que la relation entre une classe collective et un de ses éléments est la relation de partie à tout. De ce point de vue, la classe collective des arbres qu'est la forêt est envisagée comme un tout, un agrégat concret, qui contient non seulement les arbres à titre d'éléments, mais également les branches et les feuilles de ces arbres, puisque celles-ci sont autant des parties de la forêt que ne le sont les arbres. La forêt peut ainsi être décomposée en ses éléments, c'est-à-dire en ses parties, de plusieurs manières[6]. En revanche, dans la théorie classique des ensembles, seuls les arbres sont des éléments – des *membres* – de la forêt, c'est-à-dire de la classe distributive des arbres.

Chez Leśniewski, la méréologie est au service d'un nominalisme radical qui a notamment pour ambition de se débarrasser purement et simplement de ces « monstres théoriques » que sont les classes au sens distributif. C'est encore le même rôle qu'a tenté de lui faire jouer, sous le nom de « calcul des individus »[7], Nelson Goodman dans la *Structure de l'apparence*. Selon lui, le nominalisme trouve son origine dans l'idée qu'il ne devrait pas y avoir de distinction d'entités sans une distinction de contenu (Goodman 2004 [1951], pp. 49-50). Or, la théorie des ensembles ne respecte précisément pas ce principe, au contraire de la méréologie. Considérons, un univers composé des trois individus *a*, *b*, et *c*. La

[5] *Cf.* la proposition (2) in Leśniewski (1989 [1927-1931], p. 49).

[6] Il y a une sorte d'exception à ce principe : si le tout possède des atomes méréologiques (des objets qui n'ont pas de parties distinctes d'eux) et que ceux-ci épuisent le tout, alors la décomposition du tout en ses atomes est unique.

[7] Goodman a exposé le calcul des individus en 1940 dans un article écrit en collaboration avec Henri Leonard (Leonard et Goodman 1940). En fait, Leonard avait déjà développé cette théorie dans sa thèse de 1930 sur les termes singuliers. Sur les relations entre le système de 1930 et celui de 1940, *cf.* Rossberg (2009).

méréologie permet sur cette base de former exactement sept individus différents : *a*, *b*, *c*, *a* + *b*, *a* + *c*, *b* + *c* et *a* + *b* + *c*, où l'expression « + » désigne l'opération de somme ou de fusion méréologique binaire. La théorie des ensembles permet quant à elle de former des classes d'individus, comme {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*a, b*}, {*a, c*}, {*b*, *c*} et {*a*, *b*, *c*}, mais également des classes de classes d'individus, comme, {{*a*}}, {{*a*}, {b}}, {{*a*}, {*a*, *b*}}, ..., des classes de classes de classes d'individus, comme {{{*b*}}}, {{{*a*}}, {{*a*, *b*}}}, ..., et ainsi de suite à l'infini. Ce que Goodman trouve intolérable ici, c'est qu'à partir d'un même contenu, disons *a* et *b*, la théorie des ensembles autorise la formation d'entités aussi différentes que {*a, b*}, {{*a*}, {*b*}}, {{*a*}, {*a*, *b*}}, *etc.* Pour sa part, à partir de ces deux mêmes individus, la méréologie ne peut former que *a* + *b*. Il n'y a pas, dans cette théorie, de différence entre *a* + *b* et (*a* + *b*) + *b* ou entre *a* + *b* et (*a* + *b*) + (*a* + *b*), par exemple.

II. Théorie des ensembles *et* méréologie

En constatant le lien étroit qui existe historiquement entre nominalisme et méréologie, on ne peut qu'être surpris pas l'ambition de David Lewis dans *Parts of Classes*, à savoir appliquer la méréologie à la théorie des classes distributives :

> Nous avons appris à distinguer deux manières totalement différentes de produire une chose à partir de plusieurs : la manière qui produit une fusion à partir de plusieurs parties, par opposition à la manière qui produit une classe à partir de plusieurs membres. Nous avons appris que les fusions et les classes représentaient deux types différents de choses, de sorte qu'aucune classe ne fut jamais une fusion. Nous avons appris que “la relation de partie à tout s'applique aux individus, non aux ensembles”. Nous avons même appris à appeler “Le Calcul des individus” méréologie !
>
> Tout cela était une grossière erreur. Ce n'est pas parce qu'une classe n'est pas une fusion méréologique de ses membres que nous devrions en conclure immédiatement qu'il ne s'agit pas d'une fusion. Ce n'est pas parce qu'une classe n'est pas composée méréologiquement de ses membres que nous devrions en conclure qu'il y a une certaine manière non méréologique de produire une chose à partir de plusieurs. Ce n'est pas parce qu'une classe n'a pas tous ses membres à titre de parties, et uniquement ceux-là, que nous devrions en conclure qu'une classe n'a pas de partie.
>
> [...] La méréologie s'applique bien aux classes » (Lewis 1991, p. 3).

Lewis soutient donc que la méréologie et la théorie des ensembles ne sont pas irrémédiablement irréconciliables. La relation de partie à tout formalisée par la première s'applique bien aux entités de la seconde.

Pour mieux comprendre la position de Lewis au sein du débat sur les relations entre méréologie et théorie des ensembles, nous pouvons utiliser une distinction, due à Kris McDaniel, entre deux attitudes à l'égard de la relation de partie à tout : le « monisme compositionnel » et le « pluralisme compositionnel »[8]. La première position soutient simultanément que :

1) il y a exactement *une* relation fondamentale de partie à tout ;

2) cette relation s'applique aux éléments de n'importe quelle *catégorie ontologique*.

Le monisme compositionnel revient donc à admettre *l'universalité catégorielle* de la relation de partie à tout. De ce point de vue, il n'y a donc qu'une *seule* véritable méréologie : celle qui capture la relation fondamentale de partie à tout s'appliquant à n'importe quel type d'objet, qu'il s'agisse d'un objet concret, abstrait, atemporel, occupant une région spatiale, *etc*. À l'opposé, le pluralisme compositionnel affirme que, « de même qu'il y a plus d'une catégorie ontologique fondamentale et irréductible, il y a plus d'une relation fondamentale et irréductible de partie à tout » (McDaniel 2004, p. 142)[9]. Nous avons dès lors plusieurs théories des touts et des parties, des principes méréologiques qui s'appliquent à certaines manières d'être une partie d'un tout et pas à d'autres.

Précisons toutefois que le pluralisme compositionnel ne nie pas qu'il y ait certains principes communs à toutes les significations de la notion de partie. Peter Simons, dont la profession de foi pluraliste en matière de composition est hors de doute[10], soutient ainsi que le concept de « "partie", comme d'autres concepts formels, n'est pas univoque, mais possède des significations analogues selon que nous parlions d'individus, de classes ou de masses » (Simons 1987, p. 2). L'idée est qu'il y a des propriétés formelles qui reviennent de manière minimale à toutes les relations de partie à tout. Ces propriétés sont formelles en ce qu'elles valent des différents types de relations de partie à tout indépendamment des catégories d'objets auxquelles s'appliquent ces relations. Par exemple, toute relation de partie à tout serait transitive, peu importe que les objets mis en relation soient des objets concrets ou des objets abstraits. Il y aurait donc un « squelette formel » (Simons 1987, p. 362), une structure minimale à laquelle répond

---

[8] *Cf.* la caractérisation qu'il en donne in McDaniel (2004, pp. 141-142).
[9] Kit Fine (2010) défend une position pluraliste tout à fait séduisante.
[10] *Cf.* le point (1) in Simons (1987, p. 364).

toute relation méréologique. À côté des propriétés globales qui caractérisent cette structure minimale, il faut alors distinguer les propriétés locales qui caractérisent les différentes variétés de relations méréologiques propres à certaines régions ontologiques ou catégories d'objets.

Lewis quant à lui adhère assez clairement au monisme compositionnel[11]. Plus précisément, il défend l'universalité d'une certaine version de la méréologie, celle dite *extensionnelle classique*[12]. Aussi la relation de partie à tout que formalise cette théorie est-elle « *topic-neutral* », neutre quant aux types d'objets auxquels elle s'applique.

Leśniewski et Goodman semblent eux aussi avoir été des partisans du monisme compositionnel. Le problème, si l'on peut dire, est que leur crédo nominaliste les contraignait à n'admettre qu'une seule catégorie ontologique : celle des individus[13]. Les classes n'étant pas des individus, elles étaient assimilées à des objets mythiques dont il fallait débarrasser notre ontologie, et auxquels la méréologie n'avait par conséquent pas à s'appliquer. Mais, dès lors que l'on prend au sérieux l'idée que la méréologie extensionnelle classique s'applique au « domaine absolument non restreint, qui comprend toute chose » (Eschenbach et Heydrich, p. 733), d'une part, et qu'on ne préjuge pas de ce qu'il y a, d'autre part, nous sommes obligés de l'appliquer aux classes de la théorie des ensembles. C'est précisément ce que soutient Lewis dans *Parts of Classes*. De la sorte, le rapport d'opposition entre la théorie formelle des touts et des parties et la théorie des ensembles, qui avait présidé aux premiers développements de la méréologie, doit être reconsidéré. Les deux théories ne sont pas incompatibles, mais complémentaires, la méréologie pouvant servir de cadre dans lequel formuler la théorie des ensembles.

Encore faut-il montrer que l'application de la méréologie à la théorie des ensembles a un quelconque intérêt. C'est en l'occurrence la deuxième ambition de Lewis dans *Parts of Classes*. Selon lui, l'application de concepts méréologiques à la notion de classe permet de ne plus considérer la relation d'appartenance ensembliste comme étant primitive (comme c'est le cas dans ZF), celle-ci pouvant être remplacée par la notion de singleton et la relation de partie à tout. La théorie des ensembles devient alors une « théorie méréologique du singleton » (Rosen 1995, p. 614), ou si l'on veut une *théorie méréologisée des ensembles*. Mais, au-delà de l'utilité

[11] *Cf.* Lewis (1991, pp. 75-81).
[12] Sur ce type de méréologie, *cf.* l'ouvrage classique Simons (1987) ; ainsi que Varzi (2014).
[13] Évidemment, une ontologie monocatégorielle, qui admet la légitimité de l'application de la relation de partie à tout à la seule catégorie d'objets qu'elle reconnaît, adhère *ipso facto* au monisme compositionnel.

simplement *technique* qu'il y a à pouvoir remplacer une notion primitive par d'autres, il y a aussi une utilité de nature *épistémique* dans l'application de la méréologie à la théorie des ensembles : elle devrait nous permettre de mieux comprendre cette dernière. Cette application permet de séparer les deux visages de la théorie des ensembles, dont l'un est parfaitement « innocent » et l'autre « extravagant et puissant »[14]. Le côté « Dr. Jekyll » de la théorie des ensembles revient à combiner plusieurs éléments en une unité. Il est inoffensif, car il relève entièrement de la méréologie, laquelle est, selon Lewis, « parfaitement comprise, non problématique et certaine » (Lewis 1991, p. 75). Le rassemblement d'une pluralité en une unité au sein d'une classe n'est rien d'autre que la *composition méréologique*, la fusion d'une pluralité en un tout concret, et celle-ci est « ontologiquement innocente ». Le côté « M. Hyde » de la théorie des ensembles est quant à lui représenté par la notion de singleton. C'est en effet lui qui nous permet de générer la hiérarchie ensembliste, pour peu du moins que nous ayons un objet à notre disposition. Étant donné un individu quelconque, disons Socrate, je peux créer le singleton {Socrate}, puis le singleton de ce singleton, {{Socrate}}, *etc.*, produisant de la sorte une ontologie pour le moins luxuriante. Selon Lewis, c'est ce passage de l'un au multiple qui pose question, alors que le passage du multiple à l'un en jeu dans la composition méréologique est tout à fait inoffensif.

Le sens général du projet de *Parts of Classes* étant posé, considérons à présent la théorie des ensembles de Lewis, en commençant par le cadre méréologique dans lequel elle est formulée. Les différents systèmes exposés dans l'ouvrage de 1991 le sont de manière informelle. Nous les avons formalisés, afin de rendre la présentation du projet lewisien plus claire et plus précise.

III. La méréologie formelle de Lewis

L'appareillage logique dans lequel Lewis formule sa méréologie comprend, outre la logique des prédicats et l'identité, également des constructions « plurielles » (*plural*). Il appelle « mégéthologie » (*Megethology*) la théorie des touts et des parties qui en résulte (Lewis 1993, p. 3)[15]. Nous y trouvons, par exemple, la formulation suivante du *principe de composition non restreinte* : « à chaque fois qu'il y a *des choses*, alors il

---

[14] C'est avant tout sa « première thèse », que nous appelons ($TETh_4$) plus loin, qui permet à Lewis de séparer les deux faces de la théorie des ensembles.

[15] Il la qualifie de la sorte, car elle « se révèle avoir un pouvoir expressif suffisant pour nous permettre d'exprimer des hypothèses intéressantes quant à la taille de la réalité ».

existe une fusion de *ces choses* » (Lewis 1991, p. 74). Les termes pluriels présents dans ce genre de formulation ne désignent pas des ensembles. Comme le dit Boolos, lorsque je dis que je mange des Cheerios, ce n'est pas *l'ensemble* des Cheerios que je mange, mais bien *les Cheerios* eux-mêmes (Boolos 1984, p. 72). Par ailleurs, il ne faudrait pas croire que les phrases contenant des constructions plurielles puissent être paraphrasées de manière systématique par des phrases qui n'en contiennent pas. Il y a ainsi des constructions *irréductiblement plurielles*. Si la phrase « les philosophes lisent Platon » est équivalente à « Aristote lit Platon et Kant lit Platon et Heidegger lit Platon... », la phrase « les soldats entourent le fort » n'est quant à elle pas équivalente à « le premier soldat entoure le fort et le deuxième soldat entoure le fort... ».

Par la suite, nous noterons les variables plurielles au moyen des expressions « xx », « yy », « zz », *etc.*, tandis que les variables singulières seront notées, comme il est d'usage, au moyen des expressions « x », « y », « z », *etc.* Nous utiliserons également les notations « $\exists xx$ » et « $\forall xx$ » pour dénoter les quantifications existentielle et universelle sur la variable plurielle « xx ». Nous aurons encore recourt au symbole « ε » pour représenter la relation primitive « est un des » qui prend pour argument à gauche un terme singulier et à droite un terme pluriel. Autrement dit, « $x \mathrel{\varepsilon} xx$ » signifiera « x est un des xs », par exemple « 2 est un des nombres premiers »[16].

Plusieurs notions peuvent être prises comme primitives pour élaborer une méréologie. Lewis choisit celle de « partie », et plus précisément la relation « (est) une partie de », que nous notons « $\leq$ ». Ainsi, « $x \leq y$ » signifiera « x est une partie de y », par exemple « ma main est une partie de mon corps ». Cette relation de partie à tout *simpliciter* ne doit pas être confondue avec la relation « (est) une partie propre de », que nous notons « $<$ » et que nous pouvons définir classiquement de la manière suivante :

(MDef$_1$) $\quad x < y \equiv (x \leq y \wedge x \neq y)$ $\quad$ Partie propre,

qui signifie que « x est une *partie propre* de y si et seulement si x est une partie de y et x n'est pas identique à y ». Par exemple, ma main est une partie propre de mon corps, puisque s'il s'agit bien d'une partie de mon corps, elle ne lui est cependant pas identique.

Au moyen de la notion de partie, Lewis (1991, p. 73) définit celle de « chevauchement », que nous notons « $\circ$ », de la manière suivante :

[16] Nous ne pouvons rentrer ici plus en détail dans le développement des *logiques plurielles*. Sur ces dernières, *cf.* entre autres Oliver et Smiley (2013).

(MDef$_2$) $x \circ y \equiv (\exists z)(z \leq x \wedge z \leq y)$ Chevauchement,

ce qui signifie que « *x chevauche y* si et seulement si *x* et *y* ont une partie en commun ». Corrélativement à la notion de chevauchement, nous pouvons définir celle de « distinction », que nous notons « $\wr$ » :

(MDef$_3$) $x \wr y \equiv \sim(x \circ y)$ Distinction.

Cette définition signifie que « *x* est *distinct* de *y* si et seulement si *x* ne chevauche pas *y* ».

Une autre notion méréologique centrale est celle de « fusion »[17]. Nous notons « *Fu* » la relation « (est) une fusion de ». Cette relation prend pour argument à gauche un terme singulier et à droite un terme pluriel. En voici la définition :

(MDef$_4$) $x\ Fu\ yy \equiv [(\forall y)(y\ \varepsilon\ yy \supset y \leq x) \wedge (\forall z)(z \leq x \supset (\exists y)(y\ \varepsilon\ yy \wedge y \circ z))]$ Fusion.

Elle signifie que « *x* est une *fusion* de *y*s si et seulement si tous les *y*s sont des parties de *x* et chaque partie de *x* a une partie en commun avec au moins un des *y*s ». Prenons l'exemple d'une forêt. Celle-ci peut être considérée comme une fusion des arbres, puisque tous les arbres sont des parties de la forêt et que toute partie de la forêt chevauche au moins un arbre. Lorsqu'un objet *x* est une fusion de *y*s, nous dirons également que les *y*s *composent x*.

Comme nous le verrons, la théorie des ensembles de Lewis est atomique. Une définition de la notion d'« atome méréologique », que nous notons « *At* », pourra donc nous être utile :

(MDef$_5$) $At(x) \equiv \sim(\exists y)\ y < x$ Atome.

Autrement dit, « *x* est un *atome méréologique* si et seulement si *x* n'a pas de parties propres ».

Ces quelques définitions méréologiques étant posées, passons au système axiomatique sur lequel repose la méréologie de Lewis. Si ce système n'est pas très explicite, au sens où il ne met pas immédiatement en évidence certaines des propriétés les plus caractéristiques de la relation de partie à tout, il est néanmoins très élégant de par son économie axiomatique. Il se compose en effet de seulement trois axiomes. Le premier est un axiome de *transitivité* :

(MAx$_1$) $(x \leq y \wedge y \leq z) \supset x \leq z$ Transitivité,

qui signifie que « si *x* est une partie de *y* et *y* est une partie de *z*, alors *x* est une partie de *z* ». La relation de partie à tout est une *relation d'ordre*. Outre

[17] *Cf.* la définition (ID1) in Simons (1987, p. 327).

la propriété de transitivité, elle possède donc également celles de *réflexivité* et d'*antisymétrie* :

(MTh$_1$) $x \leq x$ Réflexivité,

(MTh$_2$) $(x \leq y \wedge y \leq x) \supset x = y$ Antisymétrie.

Ces deux dernières propriétés peuvent être déduites au moyen de (MAx$_1$) et des deux autres axiomes du système méréologique de Lewis[18].

Le deuxième axiome est le principe de « composition non restreinte » (*unrestricted composition*) (Lewis 1991, p. 74) :

(MAx$_2$) $(\exists x)\, x \,\varepsilon\, xx \supset (\exists y)\, y\, Fu\, xx$ Composition non restreinte,

qui signifie que « s'il y a des *x*s, alors il existe une fusion des *x*s »[19]. Ce principe nous permet de former la fusion de n'importe quel ensemble non vide d'objets. Il s'agit d'un principe très contesté. Le problème n'est pas qu'il produit des résultats contradictoires – la méréologie classique, dont le système de Lewis est un exemple, est un système consistant[20] –, mais plutôt qu'il semble permettre d'introduire dans notre ameublement du monde des objets pour le moins peu naturels, comme la « truite-dinde » (Lewis 1991, pp. 7-8), qui est composée de la moitié avant d'une truite et de la moitié arrière d'une dinde, mais qui n'est ni un poisson ni un gallinacé. Encore avons-nous ici une fusion méréologique intracatégoriale. Mais n'est-il pas tout à fait inadmissible de devoir également intégrer dans notre ontologie des hybrides catégoriaux tels que la fusion du Congrès de Vienne et du pied-bot de Talleyrand ?

Pour Lewis, ces exemples de fusions ne sont étranges qu'en apparence. Ils nous apparaissent comme étant inacceptables, parce que nous pensons qu'en plus des entités qui composent une somme méréologique, nous devons compter une entité supplémentaire parmi celles qui peuplent notre ontologie, à savoir la somme méréologique elle-même. Ainsi, la truite-dinde serait un objet *en plus* de la moitié avant d'une certaine truite et de la moitié arrière d'une certaine dinde. Comprendre les choses de la sorte, c'est, affirme Lewis, se méprendre totalement sur la notion de composition méréologique : celle-ci ne nous engage pas ontologiquement envers une entité supplémentaire par rapport aux entités qui composent un tout. La

---

18 Pour ces démonstrations, nous renvoyons à Ridder (pp. 68-73), en particulier aux théorèmes (T1T11) et (T1T14).

19 Soulignons que c'est avant tout l'adoption du principe (MAx$_2$) qui permet de ranger Lewis parmi les partisans du monisme compositionnel. Contrairement à Lewis, les pluralistes considèrent en effet que le principe de composition non restreinte ne s'applique pas à toutes les variétés de compositions, mais seulement à certaines d'entre elles ; il ne fait pas partie du squelette formel de la notion de partie.

20 Cela a été démontré pour la méréologie leśniewskienne par Czesław Lejewski (1969).

théorie des touts et des parties est « ontologiquement innocente » (Lewis 1991, p. 81). Nous y reviendrons.

Disons à ce stade que, pour Lewis, indépendamment de l'interprétation que nous donnons de la composition méréologique, nous n'avons pas le choix : nous devons accepter le principe de composition non restreinte, et ce, en raison d'un certain argument dit du vague[21]. Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il y ait des objets pour lesquels il n'existe pas de fusion. Il y a par exemple des truites et des dindes, mais pas de fusion d'une truite et d'une dinde. Si tel est le cas, soutient Lewis, la restriction imposée sur la composition méréologique doit être vague – il ne peut y avoir de ligne de démarcation tranchée entre les cas de composition et les cas de non-composition. Cependant, si la composition est vague, alors l'existence des composés est elle-même vague. Autrement dit, si la question de savoir quand deux objets en composent un troisième est vague, alors la question de savoir si ce troisième objet existe est elle aussi vague. Mais, rétorque Lewis, le vague est uniquement « localisé dans notre pensée et dans notre langage » ; il s'agit d'une « indécision sémantique ». L'existence des objets, elle, ne saurait être vague, ce qui entraîne à son tour que la composition ne peut pas l'être non plus, et donc que la composition méréologique ne saurait être restreinte.

Envisageons finalement le troisième et dernier axiome du système de Lewis. Il s'agit du principe d'« unicité de la composition » (*uniqueness of composition*) :

(MAx_3) $\quad (x\ Fu_t\ zz \wedge y\ Fu_t\ zz) \supset x =_t y$ $\quad$ Unicité.

Ce principe nous dit que « si x et y sont des fusions des mêmes objets à un certain instant, alors x est identique à y à ce même instant ». (MAx_3) a notamment pour conséquence que des parties identiques ne peuvent composer deux objets distincts, par exemple une statue et un morceau d'argile[22]. Par souci de simplicité, nous utiliserons par la suite une version non indexée temporellement de cet axiome.

Pour sa part, Lewis formule (MAx_3) de la manière suivante : « il n'est jamais le cas que les mêmes choses possèdent deux fusions différentes » (Lewis 1991, p. 74)[23]. Cette formulation peut être trompeuse, car elle semble vouloir dire qu'un même objet ne peut jamais être identique

[21] *Cf.* Lewis (1986a, pp. 212-213). On pourra aussi se reporter à l'exposé de Theodore Sider (2001, chap. 4, § 9, pp. 120 *sqq.*).
[22] En distinguant les parties « matérielles » des parties « formelles » d'un tout, on pourrait néanmoins soutenir que la statue et le morceau d'argile diffèrent, car ils ne possèdent pas les mêmes parties *formelles*, bien qu'ils possèdent les mêmes parties *matérielles*. *Cf.* Koslicki (2008, pp. 182-183).
[23] *Cf.* également van Inwagen (1990, p. 39).

à deux fusions différentes au sens où il ne pourrait être en même temps une fusion, disons, des *F*s et une fusion des *G*s. S'il fallait interpréter (MAx_3) de la sorte, cet axiome remettrait en cause l'une des idées principales de la méréologie classique, à savoir l'idée qu'un objet peut à la fois être composé de parties d'un certain type et de parties d'un tout autre type[24]. Par exemple, une forêt est à la fois la fusion des arbres de la forêt et la fusion des parties des arbres de la forêt. Ce que nous dit (MAx_3), c'est plutôt qu'avoir les mêmes parties suffit à garantir l'identité. Ce principe capture donc l'intuition nominaliste, déjà rencontrée, selon laquelle « il n'y a aucune différence sans quelque chose qui fasse la différence » (*there is no difference without a difference-maker*) (Lewis 1991, p. 78). À cet égard, la méréologie de Lewis est *extensionnelle*. Elle entraîne en particulier le principe dit de « supplémentation forte » (*Strong supplementation*)[25] :

(MTh_3) $\sim(x \leq y) \supset (\exists z)(z \leq y \wedge z \wr x)$ Supplémentation forte,

qui signifie que « si un objet *x* n'est pas une partie de *y*, alors il y a une partie de *y* distincte de *x* ». Le système de Lewis correspond ainsi à ce que Casati et Varzi appellent la « méréologie extensionnelle générale » (Casati et Varzi 1999, p. 46)[26]. Il permet de retrouver les systèmes de méréologies extensionnelles classiques de Leśniewski et de Leonard et Goodman, du moins si nous faisons abstraction des logiques sous-jacentes à ces systèmes formels.

Maintenant que nous sommes en possession d'un système méréologique complet, nous pouvons envisager la manière dont Lewis applique celui-ci à la théorie des ensembles.

[24] C'est l'idée exprimée par le principe (3), vu précédemment, de la méréologie leśniewskienne.

[25] Uzquiano esquisse une dérivation, dont il doit le principe à Hovda, de (MTh_3) à partir de l'unicité de la composition, du principe de composition non restreinte, de la réflexivité de « ≤ » et de la définition de la notion de fusion (2006, n. 18, p. 312). Si cette dérivation est correcte dans son principe, elle est un peu plus complexe que ne le laisse penser Uzquiano, en ce qu'elle requiert d'autres principes méréologiques. Il s'agit, d'une part, de celui qui affirme que toute partie d'un objet le chevauche et, d'autre part, de celui qui affirme que si un même objet est une partie d'un objet *x* et chevauche un autre objet *y*, alors *x* chevauche *y*. Ces deux principes sont facilement dérivables à partir de la réflexivité et de la transitivité de la relation de partie à tout, ainsi que de la définition du chevauchement.

[26] La méréologie extensionnelle générale est un système méréologique qui contient la transitivité, la réflexivité et l'antisymétrie de la relation de partie à tout *simpliciter*, le principe de composition non restreinte et le principe faible/fort de supplémentation (en présence du principe du composition non restreinte, le choix entre la version forte ou faible du principe de supplémentation ne fait pas de différence). Sur le principe de supplémentation faible, *cf. infra* (MTh_4) dans la section vii.

IV. Quelques notions ensemblistes méréologisées

Lewis choisit la notion de *singleton* comme deuxième foncteur primitif de sa théorie méréologisée des ensembles. Il s'agit plus précisément de la relation « (est un) singleton de ». Comme nous le verrons, il s'agit d'une fonction[27]. Nous noterons « $\{x\}$ » le singleton de x, de sorte que « $y = \{x\}$ » signifiera que « y est le singleton de x ». Nous aurons aussi parfois recourt au prédicat « *Singl* », qui signifie « (est) un singleton ». Nous pouvons le définir de la manière suivante :

(TEDef$_1$) $\qquad Singl(x) \equiv (\exists y)\, x = \{y\}$,

ce qui signifie que « x est un singleton si et seulement si il y a un objet dont il est le singleton ».

Passons aux définitions données par Lewis lui-même, en commençant par la notion centrale de toute théorie des ensembles : la notion de « classe ». Voici la définition qu'il donne du prédicat « (est) une classe » (Lewis 1991, p. 16), que nous notons « *Cl* » :

(TEDef$_2$) $\qquad Cl(x) \equiv (\exists zz)[(\exists z)\, z \,\varepsilon\, zz \wedge x\, Fu\, zz \wedge (\forall z)(z \,\varepsilon\, zz \supset Singl(z))]$ $\qquad$ Classe.

Cette définition signifie que « x est une *classe* si et seulement si x est une fusion de singletons ». Par exemple, étant donné que « $x + y$ » dénote la fusion (la somme méréologique binaire) de x et de y, la classe $\{a, b, c\}$ n'est rien d'autre que la fusion méréologique $\{a\} + \{b\} + \{c\}$ et $\{\{a, b\}, c\}$ n'est rien d'autre que $\{\{a, b\}\} + \{c\}$, qui n'est lui-même rien d'autre que $\{\{a\} + \{b\}\} + \{c\}$.

La définition de la relation « (est) un membre de » :

(TEDef$_3$) $\qquad x \in y \equiv (Cl(y) \wedge \{x\} \leq y)$ $\qquad$ Membre,

qui signifie que « x est *un membre* de y si et seulement si y est une classe et le singleton de x est une partie de y ». Pour Lewis (1991, p. 4), une classe est fondamentalement quelque chose qui possède des membres. Il n'y a donc pas de classe vide dans sa théorie méréologique des ensembles.

Nous l'avons déjà évoqué, une différence essentielle entre une classe au sens de la théorie des ensembles et une fusion méréologique est que nous pouvons toujours retrouver les objets à partir desquels a été créée une classe donnée, tandis qu'un tout méréologique peut être décomposé de plusieurs manières, de sorte qu'il n'est pas possible de déterminer les parties à partir desquelles il a été composé comme étant celles en lesquelles nous pouvons le décomposer. Prenons un exemple. Soit trois objets a, b et c. À partir de

[27] *Cf. infra* l'axiome (AMAx$_1$).

ces trois objets, nous pouvons créer l'ensemble $\alpha = \{a, b, c\}$. Nous savons que cet ensemble a été construit à partir de *a*, de *b* et de *c*, parce que ces trois objets sont des *membres* de α – symboliquement : $a \in \alpha$, $b \in \alpha$ et $c \in \alpha$. En revanche, une fois le tout $a + b + c$ formé, nous ne pouvons plus déterminer qu'elles sont les parties au moyen desquelles il a été crée, puisque autant *a*, *b* et *c* sont des parties propres de ce tout, que $a + b$, $b + c$, ou encore $a + c$.

Les définitions lewisiennes, si elles définissent les classes en termes de fusions, n'écrasent pas pour autant les premières sur les secondes. Les caractéristiques distinctives des classes par rapport aux fusions sont conservées. Dans la définition (TEDef_3), le membre d'une classe donnée et la partie correspondante de cette même classe ne sont pas du même *type logique* : la partie est une classe comprenant le membre en question à titre d'unique élément. Le domaine de la relation « $\leq$ » est donc restreint, dans le cas des classes, aux singletons. Dès lors, si *a* est bien un membre de α dans notre exemple, puisque $\{a\}$ est une partie α – cette dernière étant la fusion de $\{a\}$ et de deux autres objets –, ce n'est pas le cas de $\{a\} + \{b\}$, puisque le singleton $\{\{a\} + \{b\}\}$ n'est pas une partie de α. $\{\{a\} + \{b\}\}$ est quelque chose de plus que la simple fusion méréologique de $\{a\}$ et de $\{b\}$, quelque chose qui n'est précisément pas inclus dans α à titre de partie.

Les classes sont par essence des objets qui possèdent des membres. Par opposition, nous pouvons définir les « individus » comme des objets qui n'ont pas de membres, mais qui peuvent éventuellement être des membres. Voici la définition du prédicat « (est) un individu » (Lewis 1991, p. 17), que nous notons « *Ind* » :

(TEDef_4) $\quad Ind(x) \equiv \sim(\exists y)(y \leq x \wedge Singl(y))$ $\quad$ Individu.

Cette définition nous dit que « *x* est un *individu* si et seulement si *x* n'a pas de singleton à titre de partie ». Par conséquent, aucun individu n'est une classe, ni même ne chevauche une classe.

Considérons deux classes α et β. Que dénote l'expression « $\alpha \cap \beta$ », autrement dit quelle est l'*intersection* de α et de β, lorsque ces deux classes n'ont pas de membre en commun, par exemple si α est la classe des nombres pairs et β celle des nombres impairs ? Cette intersection ne peut être une classe – classiquement la classe vide –, car pour Lewis une classe possède toujours au moins un membre et que l'objet recherché ici doit en être dépourvu, sinon α et β auraient bien un membre en commun, contrairement à ce qu'affirme notre hypothèse de départ. Il doit donc s'agir d'un individu : un objet qui n'a pas de membre. Lewis appelle cet individu l'« ensemble nul ». Nous pouvons définir le prédicat « (est) un ensemble nul », que nous notons « *Null* », de la manière suivante :

(TEDef$_5$) $Null(x) \equiv (\exists yy)(x\ Fu\ yy \wedge (\forall y)(y\ \varepsilon\ yy \supset Ind(y)))$ Ensemble nul,

définition qui signifie que « *x* est l'*ensemble nul* si et seulement si *x* est la fusion de tous les individus ». L'ensemble nul est bien un individu, puisqu'étant composé uniquement d'individus, il ne peut être composé de singletons[28]. Par la suite, nous noterons simplement « ∅ » l'unique individu qui satisfait « *Null*(*x*) ».

La définition lewisienne de l'ensemble nul pourra au premier abord surprendre. Il ne semble en effet n'y avoir rien de moins vide, de plus éloigné de l'individu qui n'est rien, que la somme méréologique de tous les individus. Il faut avant tout souligner que le point de vue de Lewis est *structurel* : l'important n'est pas la nature métaphysique profonde de l'ensemble nul, mais le rôle qu'il doit jouer dans le système ensembliste. Le *sérieux ontologique* n'est donc pas ici un impératif. L'ensemble nul peut être n'importe quel objet, pourvu que l'objet choisi satisfasse un certain nombre de conditions structurelles. Selon Lewis (1991, p. 11), celles-ci sont au nombre de deux. Premièrement, l'ensemble nul doit servir de « dénotation de dernier recours » aux expressions de classes qui ne dénotent pas de classes. L'ensemble nul nous permet par exemple de fournir une dénotation à l'intersection vide de deux classes que nous mentionnions plus haut. Deuxièmement, l'ensemble nul doit servir d'« élément de dernier recours » (Lewis 1991, p. 12), c'est-à-dire que l'existence des entités générées par la théorie des ensembles doit ultimement reposer sur celle de l'ensemble nul. Dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, la hiérarchie ensembliste est habituellement générée de manière itérative à partir de la classe vide :

$$\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}, \{\{\{\}, \{\{\}\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\},\{\{\}\}\}\}, \ldots$$

Si nous n'avons pas de classe vide à notre disposition, comme c'est le cas dans le système de Lewis, nous pouvons éventuellement générer cette hiérarchie en choisissant arbitrairement un individu, disons Socrate. Elle repose alors tout entière « en équilibre » sur cet individu qui constitue son fondement. L'existence de la hiérarchie devient aussi fragile que l'est celle de Socrate – celui-ci pourrait très bien ne pas avoir existé.

Le choix de l'ensemble nul pour jouer ce rôle de fondement de la hiérarchie ensembliste permet d'échafauder la totalité de la pyramide

[28] Cela est établi explicitement par l'axiome (AMAx$_3$) ci-dessous.

mathématique sur un fondement dont l'existence est moins contingente que celle de Socrate, l'existence de l'ensemble nul de Lewis étant garantie dans tout monde possible dans lequel il existe au moins un individu. Mais, dira-t-on, qu'en est-il dans ce cas du monde vide, d'un monde possible dans lequel n'existe aucun individu ? Dans un tel monde, rétorque Lewis, « peut-être pouvons-nous laisser tomber les mathématiques. Avons-nous réellement besoin d'être assurés à ce point ? » (Lewis 1991, p. 13). On peut effectivement se le demander[29] ? À notre avis, les mathématiques, en tant que discipline *a priori*, ne devraient pas dépendre d'un fait aussi contingent que l'existence ou la non-existence d'individus. Exiger qu'elles soient valables dans tout monde possible, même vide, n'est certainement pas un prix trop exorbitant à payer.

Comme son nom l'indique, l'ensemble nul est un « ensemble ». Les ensembles sont généralement des classes qui sont des membres d'autres classes. Lewis modifie cette définition de manière à intégrer l'ensemble nul parmi les ensembles. Ainsi, la distinction passe moins entre les classes qui sont des ensembles et celles qui n'en sont pas (de tels objets existent néanmoins, comme nous le verrons un peu plus loin), qu'entre les ensembles qui sont des classes et ceux qui n'est sont pas (l'ensemble nul). Lewis définit donc le prédicat « (est) un ensemble » (Lewis 1991, p. 18), que nous notons « *Ens* », de la manière suivante :

(TEDef$_6$) $Ens(x) \equiv (x = \varnothing \vee (Cl(x) \wedge (\exists y)\, y = \{x\}))$ Ensemble,

ce qui signifie que « x est un *ensemble* si et seulement si x est identique à l'ensemble nul ou est une classe qui a un singleton ». Dit autrement, un ensemble est l'ensemble nul ou une classe qui est membre d'une autre classe.

Pouvons-nous admettre que la classe de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes soit un ensemble ? Si tel était le cas, cette classe nous exposerait au paradoxe de Russell. Il y a donc lieu de distinguer parmi les classes celles qui ne peuvent être des ensembles. Lewis les qualifie de « classes propres ». Nous notons « Cl_{pr} » le prédicat « (est) une classe propre » et nous le définissons de la manière suivante :

(TEDef$_7$) $Cl_{pr}(x) \equiv (Cl(x) \wedge {\sim}(\exists y)\, y = \{x\})$ Classe propre,

qui signifie que « x est une *classe propre* si et seulement si x est une classe et x n'a pas de singleton ». N'ayant pas de singleton, les classes propres ne peuvent être membres de quoi que ce soit.

[29] Michael Potter (1993, pp. 363-364) et Michael Hand (1995, pp. 429-431) sont également critiques à l'égard de la définition lewisienne de l'ensemble nul.

En théorie des ensembles, les individus sont généralement identifiés aux *Urelemente*, en tant qu'objets qui ne sont pas des ensembles. Néanmoins, dans le système de Lewis, l'ensemble nul étant un individu, il convient de séparer les deux notions. C'est ce que permet la définition suivante (Lewis 1991, p. 98) :

(TEDef$_8$) $Ur(x) \equiv (Ind(x) \wedge x \neq \varnothing)$ *Urelement*.

Un *Urelement* est donc un individu autre que l'ensemble vide, ou, dit autrement, un objet différent de l'ensemble nul qui ne possède pas de singleton à titre de partie.

V. La thèse centrale de la théorie méréologisée des ensembles

Si nous acceptons l'idée selon laquelle la méréologie classique peut être appliquée à la théorie des ensembles, la question fondamentale que nous devons nous poser est celle de savoir quelles sont les parties d'une classe ? Une première réponse consiste à dire que ce sont ses *membres*, autrement dit les objets qui lui appartiennent. Dès lors, il semble que la relation d'*appartenance* à une classe ne soit rien d'autre que la relation de partie à tout au sens classique ; la manière dont les membres d'un ensemble sont des parties de cet ensemble serait identique à celle dont certains objets sont des parties d'une somme méréologique. Mais cela est clairement faux, pour la simple et bonne raison que la relation de partie à tout formalisée par la méréologie classique est *transitive*, au contraire de la relation d'appartenance ensembliste. Ainsi[30], nous pouvons dire que la fusion $(a + b) + (c + d)$ est composée de $a + b$ et de $c + d$, de sorte qu'elle est également composée des objets a, b, c et d, puisque a et b sont des parties de $a + b$ et c et d sont des parties de $c + d$. En revanche, nous ne pouvons dire que a, b, c et d sont des membres de $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, alors que ce sont des membres de $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$, qui eux-mêmes sont des membres de $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Une deuxième réponse est celle de Lewis dans *Parts of Classes*. Elle revient à dire que les parties d'une classe sont elles-mêmes des classes. Il s'agit plus précisément de ses sous-classes :

> [L]es classes ont des parties : leurs sous-classes. Il se peut qu'elles aient également d'autres parties ; cela reste à voir. Mais pour l'instant, il faudra nous en contenter. (Lewis 1991, p. 5).

[30] Nous reprenons cet exemple à Fine (2010, p. 563).

Si nous pouvons dire que les parties d'une classe sont ses sous-classes, c'est notamment parce qu'entre la relation de partie à tout, « $\leq$ », et la relation de sous-classe à classe, « $\subseteq$ », aussi appelée « inclusion » ensembliste, il y a une forte « analogie de caractère formel » (*analogy of formal character*). En fait, la plupart des propriétés formelles que nous attribuons habituellement aux relations et opérations méréologiques caractérisent également certaines relations et opérations ensemblistes. En voici quelques exemples[31] :

Méréologie	Théorie des ensembles	
$(x \leq y \wedge y \leq z) \supset x \leq z$	$(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \supset x \subseteq z$	Transitivité
$x < x$	$x \subseteq x$	Réflexivité
$(x \leq y \wedge y \leq x) \supset x = y$	$(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \supset x = y$	Antisymétrie
$x \leq y \equiv (x < y \vee x = y)$	$x \subseteq y \equiv (x \subset y \vee x = y)$	Partie/sous-classe propre
$x \leq \mathrm{y} \equiv (x + y = y)$	$x \subseteq \mathrm{y} \equiv (x \cup y = y)$	Somme/union
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	Associativité
$x + y = y + x$	$x \cup y = y \cup x$	Commutativité
$x + x = x$	$x \cup x = x$	Idempotence

Pour pouvoir établir la « thèse principale » de Lewis selon laquelle les parties d'une classe donnée sont ses sous-classes, nous avons besoin de plusieurs définitions préliminaires. Commençons par celle de la relation d'inclusion (Lewis 1991, p. 17)[32] :

(TEDef$_9$) $\quad x \subseteq y \equiv [(x = \varnothing \wedge (y = \varnothing \vee Cl(y))) \vee (Cl(x) \wedge Cl(y) \wedge (\forall z)(z \in x \supset z \in y))]$ Inclusion.

Cette définition signifie que « x est *inclus* dans y si et seulement si (i) x est l'ensemble nul et y est l'ensemble nul ou une classe, ou (ii) x et y sont des classes et tout membre de x est un membre de y ». Nous avons ici volontairement modifié la deuxième clause. Lewis dit dans celle-ci que « x et y sont des classes et x est une partie de y ». Pourtant, dans la démonstration de la thèse (TEth$_4$)[33], il fait appel à la notion d'inclusion telle que nous la définissons ici, et non telle que définie dans *Parts of Classes*.

[31] *Cf.* Champollion (2012, p. 10).
[32] L'ensemble nul est inclus dans toute classe au sens de la définition traditionnelle – un objet est inclus dans un autre si et seulement si tout membre du premier est un membre du second –, puisqu'il n'a pas de membre. Lewis ne reprend pas exactement cette définition traditionnelle de l'inclusion afin d'éviter que tous les individus autres que l'ensemble nul ne soient inclus dans toutes les classes, les individus étant dépourvus de membres.
[33] *Cf.* la démonstration de la « *First Thesis* » in Lewis (1991, pp. 98-99).

Nous définissons encore la relation « (est) une sous-classe de », que nous notons « Cl_{sous} », de la manière suivante :

(TEDef$_{10}$) $x\ Cl_{sous}\ y \equiv (Cl(x) \wedge x \subseteq y)$ Sous-classe,
ce qui signifie que « *x* est une *sous-classe* de *y* si et seulement si *x* est une classe incluse dans *y* ». La condition selon laquelle *x* est une classe doit permettre d'exclure l'ensemble nul du domaine des sous-classes. Cet ensemble est en effet inclus dans toute classe selon (TEDef$_9$).

Ces définitions étant posées, la thèse principale de Lewis dans *Parts of Classes* peut être formulée de la manière suivante (Lewis 1991, p. 7)[34] :

(TETh$_6$) $Cl(y) \supset (x \leq y \equiv x\ Cl_{sous}\ y)$ Thèse principale,
laquelle signifie que « *x* est une *partie d'une classe y* si et seulement si *x* est une sous-classe de *y* ». Cette thèse est au centre du projet lewisien, puisque c'est elle qui réduit la notion ensembliste de sous-classe à celle, méréologique, de partie. La relation d'inclusion ensembliste n'est ainsi rien d'autre que la relation de partie à tout restreinte aux classes. Il faut toutefois souligner que la relation d'inclusion qui est ici réduite n'est pas la relation d'inclusion ensembliste dans toute sa généralité, mais l'inclusion entre classes *non vides*, la classe vide étant absente du système de Lewis – toute classe possède au moins un membre.

On comprend mieux alors ce qui distingue l'ensemble nul $\varnothing$ de la classe vide, mais aussi de l'« individu nul » de Richard M. Martin. La classe vide est habituellement incluse dans toute classe et est une sous-classe de toute classe, alors que l'ensemble nul, s'il est inclus dans toute classe, n'est la sous-classe, et donc la partie, d'aucune classe. Qui plus est, tandis que l'individu nul est une partie de tout individu, l'ensemble nul ne fait partie d'aucun individu, mais contient plutôt tout individu à titre de partie.

Revenons à la thèse principale de Lewis. Celle-ci a pour conséquence importante que les singletons sont des atomes méréologiques (Lewis 1991, p. 15) :

(TETh$_7$) $Singl(x) \supset At(x)$.

Un singleton n'ayant qu'un seul membre, il ne possède pas de sous-classe, si ce n'est lui-même (il n'a pas de sous-classe propre), et n'a dès lors pas non plus de partie propre. En particulier, ni Socrate, ni l'ensemble vide { } ne sont des parties du singleton {Socrate}, ce que certains auteurs trouvent particulièrement regrettable[35]. En revanche, Socrate est bien un membre de {Socrate}, puisque le singleton de Socrate est identique à {Socrate}, et que

[34] En fait, Harry C. Bunt (1985) avait déjà fait une proposition similaire.
[35] *Cf.* par exemple Caplan, Tillman et Reeder (2010, p. 520).

donc le premier est une partie (impropre) du second. Ajoutons encore que si le singleton {Socrate} est un atome méréologique, ce n'est *a priori* pas le cas de Socrate lui-même, puisqu'il possède des parties propres (ses mains, sa tête, *etc.*), lesquelles parties propres de Socrate ne sont pas des parties propres du singleton {Socrate}[36].

Comme nous l'avons déjà mentionné, la relation d'appartenance ensembliste n'est fondamentalement pas une relation d'inclusion méréologique (Rosen 1995, p. 614). Cela permet notamment à Lewis d'éviter de dire que le singleton {Socrate} est *composé* (au sens méréologique) de Socrate, puisque la composition est le rassemblement de *plusieurs* choses en une seule. Seules les classes contenant plusieurs membres peuvent être dites composées. Plus encore, le refus de faire de l'appartenance ensembliste un type d'inclusion méréologique permet à Lewis de conserver l'idée selon laquelle des objets différents ne sauraient être composés exactement des mêmes parties. En effet, la génération d'un singleton à partir d'un objet quelconque était un type de composition méréologique, il semble que nous serions obligés de reconnaître que {Socrate}, {{Socrate}}, {{{Socrate}}}, *etc.*, tout en étant des objets différents, sont générés à partir d'un seul et même élément. Pour Lewis (1986b, p. 37), ce genre de génération ne relève tout simplement pas de la composition méréologique.

La thèse principale de Lewis peut être déduite immédiatement de deux autres sous-thèses (Lewis 1991, pp. 4 et 6) :

(TETh$_4$) $(Cl(x) \wedge Cl(y)) \supset (x \leq y \equiv x\ Cl_{sous}\ y)$ Première thèse,

(TETh$_5$) $\sim(\exists x)(Cl(x) \wedge (\exists y)(y \leq x \wedge \sim Cl(y)))$ Deuxième thèse,

qui signifient respectivement qu'« une classe est partie d'une autre si et seulement si la première est une sous-classe de la seconde » et que « toute partie d'une classe est elle-même une classe ». La première thèse se démontre assez facilement[37]. La démonstration de la deuxième est moins simple, si bien que Lewis l'établit au moyen de trois thèses intermédiaires[38] :

(TETh$_1$) $Ind(x) \vee Cl(x) \vee (\exists yy)(x\ Fu\ yy \wedge (\exists yz)(y\ \varepsilon\ yy \wedge z\ \varepsilon\ yy \wedge Ind(y) \wedge Cl(z)))$ Division,

---

[36] Cette situation peut sembler étrange, mais elle ne découle que du fait que Socrate n'est pas une partie de {Socrate}, si bien que nous ne pouvons ici appliquer la transitivité de la relation de partie à tout.

[37] *Cf.* Lewis (1991, pp. 98-99).

[38] *Cf.* Lewis (1991, p. 99). La démonstration proprement dite se trouve pp. 9-10.

(TETh₂) $\sim(\exists x)(Cl(x) \wedge (\exists y)(Ind(y) \wedge x \leq y))$ Priorité,

(TETh₃) $(\exists yy)(x\ Fu\ yy \wedge (\forall y)(y\ \varepsilon\ yy \supset Ind(y))) \supset Ind(x)$ Fusion,

qui signifient respectivement qu'« il n'y a (dans la réalité) que des individus, des classes ou des fusions mixtes de classes et d'individus », qu'« aucune classe n'est une partie d'un individu » et que « toute fusion d'individus est elle-même un individu.

Lorsque Leśniewski développait sa théorie des classes collectives, il importait avant tout que, tout en répondant au canon de rigueur formelle mis en place par la logique moderne, cette théorie fut en accord avec la manière dont nous utilisons communément certaines expressions « dans le langage courant [*w języku potocznym*] des gens qui ne se sont jamais préoccupés de "théorie des classes" ni de "théorie des ensembles" » (Leśniewski 1989 [1927-1931], p. 53). Par conséquent, du point de vue de notre pratique linguistique ordinaire, les classes au sens ensembliste devraient être exclues de la méréologie et ne devraient en aucun cas posséder des parties. Or, pour Lewis, la thèse (TEth₄) est également censée refléter le « discours commun » (*common speech*)[39] :

> Il semble naturel de dire qu'une sous-classe est une partie d'une classe : la classe des femmes fait partie de la classe des êtres humains, la classe des nombres fait partie de la classe des nombres naturels, et ainsi de suite. (Lewis 1991, p. 4).

S'il fallait réconcilier les points de vue de Leśniewski et de Lewis, nous pourrions dire, sans être wittgensteiniens pour autant, qu'entre l'époque à laquelle écrivait le premier et celle à laquelle écrivait le second, le langage s'est adapté, de sorte que si l'utilisation des expressions « classe » ou « ensemble » au sens de la théorie des ensembles ne faisait pas partie des pratiques linguistiques ordinaires au début du XX^e siècle, il est devenu tout à fait naturel de parler de parties d'une classe au sens d'une sous-classe à la fin de ce même siècle – l'enseignement des mathématiques bourbachiques n'étant certainement pas étranger à ce changement de pratique linguistique ordinaire.

Après cet exposé des aspects, relativement techniques, de la théorie méréologisée des ensembles, nous voudrions maintenant aborder les aspects plus métaphysiques à la base du système de Lewis, à savoir ceux qui concernent la nature du singleton et de la composition méréologique.

---

39 Pour une critique de l'argument en faveur de (TETh₄) qui consiste à s'appuyer sur nos pratiques linguistiques ordinaires, *cf.* Oliver (1994, pp. 216-218).

VI. Le singleton : une notion mystérieuse

Selon Lewis, la notion de singleton est « profondément mystérieuse » (Lewis 1991, p. 57). Elle l'est pour au moins trois raisons. Premièrement, nous pouvons nous demander où se situent ces objets. Les singletons sont des classes et, en tant que tels, ils sont généralement considérés comme des objets abstraits n'étant situés en aucun lieu[40]. Pourtant, il semble tout aussi naturel de dire qu'ils se trouvent là où se trouvent leurs uniques éléments. Par exemple, {Socrate} se situerait à l'endroit même où se situe Socrate. Dans *Parts of Classes*, Lewis finit par dire que n'ayant en fait aucun indice nous permettant de décider si les classes sont situées dans l'espace et dans le temps ou si elles ne le sont pas (Lewis 1991, p. 33), il est préférable de renoncer à l'ambition même de répondre à une telle question.

Deuxièmement, nous pouvons nous demander dans quelle mesure les singletons possèdent des *propriétés intrinsèques*[41] qui permettraient de les distinguer les uns des autres. Est-ce que le singleton {Socrate} et le singleton {Platon} diffèrent de manière intrinsèque ou sont-ils des copies exactes l'un de l'autre ? Nous ne pouvons répondre à cette question en invoquant les parties différentes qui composeraient éventuellement ces objets, puisque les singletons sont des atomes méréologiques, et n'ont donc pas de *structure interne*[42]. Ne pouvant trancher dans un sens ou dans l'autre, nous sommes à nouveau dans l'embarras.

Troisièmement, nous pouvons nous interroger sur la nature de la relation qu'entretient un singleton avec son unique élément. Autrement dit, qu'est précisément cette relation que nous appelons l'*appartenance* d'un objet à une classe ? Par exemple, s'agit-il d'une relation externe ou d'une relation interne ? Pourquoi un singleton possède-t-il tel membre et pas tel autre ? Là encore, nous nous trouvons bien dépourvus pour répondre à ce genre de question.

Nous sommes en mesure d'effectuer des opérations complexes sur les ensembles, nous sommes parfaitement capables de les utiliser à

---

[40] Lewis (1983, p. 40) soutenait qu'aucun ensemble ne se trouvait *dans* un monde au sens où il en serait une partie.

[41] Selon Lewis (1986a, p. 61), les propriétés intrinsèques sont des propriétés possédées par les choses « en vertu de la manière dont elles sont elles-mêmes ». Elles s'opposent aux propriétés *extrinsèques*, c'est-à-dire aux propriétés que possèdent les choses « en vertu de leurs relations ou de leur manque de relations à d'autres choses ».

[42] Les membres des singletons étant quant à eux bien pourvus d'une structure interne complexe, Lewis (1991, p. 41) en conclut que les singletons sont « entièrement distincts » de leurs membres.

différentes fins, mais leur nature, elle, demeure mystérieuse. La théorie lewisienne des ensembles étant échafaudée sur la notion primitive de singleton, nous ne comprenons celle-ci que pour autant que nous comprenons celle-là. En d'autres termes, notre ignorance à l'égard de la théorie des ensembles se mesure à notre ignorance à l'égard du concept de singleton.

Plutôt que de tenter de répondre aux questions qui permettraient d'élucider la nature du singleton, Lewis s'engage en faveur d'une forme de *structuralisme* ensembliste (Lewis 1991, pp. 45-54). Dans cette approche, il n'est pas nécessaire d'approfondir l'essence mystérieuse du singleton pour ensuite trouver *l'*objet, ou mieux *la* fonction, qui instancierait en quelque sorte cette essence. L'approche structuraliste revient plutôt à se contenter des *conditions structurales* que doit satisfaire la notion de singleton afin de remplir les buts que nous voulons lui faire jouer, par exemple nous permettre de capturer l'arithmétique élémentaire. À cet égard, n'importe quelle fonction fera l'affaire. Il n'y a donc pas qu'une seule *fonction singleton*, mais une multiplicité d'entre elles satisfaisant les conditions structurales stipulées.

VII. Une conception structurale

La méréologie classique a la même structure que l'*algèbre booléenne complète*[43], moins l'*individu nul*. Ce dernier est un analogue méréologique de la classe vide, censé être une partie propre de tout objet. Il ne saurait être inclus dans la méréologie classique, car il contrevient à une conséquence du principe de supplémentation forte, à savoir le principe dit de « supplémentation faible » :

(MTh$_4$) $x < y \supset (\exists z)(z < y \wedge z \lfloor x)$ Supplémentation faible.

Celui-ci signifie que « si *x* est une partie propre de *y*, alors *y* possède une partie propre distincte de *x* ». L'individu nul est une partie propre de n'importe quel objet. Dès lors, c'est une partie propre d'un objet *y* sans qu'il y ait pour autant une partie propre de cet objet qui soit distincte de l'individu nul, ce dernier chevauchant nécessairement toute partie de *y* (Hovda 2009, p. 72). Indépendamment de cette raison technique, on peut douter que l'on puisse donner un sens intuitif à la notion même d'individu nul d'un point de vue méréologique. En effet, tout individu étant une fusion

[43] Cette affirmation remonte à Tarski (1935). Sur les relations entre méréologie classique et algèbre booléenne, *cf.* Ridder (2002, chap. 3, pp. 161-191).

d'éléments, en quoi consisterait un individu qui ne serait composé d'aucun objet ?

À l'instar de Simons, il faut cependant souligner que « [l]a différence importante entre la méréologie et la théorie des ensembles ne réside pas dans la question, mineure d'un point de vue algébrique, de savoir s'il y a un zéro [c'est-à-dire un élément nul] ou non » (2006, p. 600). Nous pouvons pour les besoins de la cause mathématique tout à fait introduire de manière artificielle un objet destiné à endosser le costume d'élément nul au sein de la méréologie. Comme nous l'avons vu, Lewis ne s'en est pas privé, nommant ce curieux objet « ensemble nul » plutôt qu'« individu nul »[44].

La différence fondamentale entre la méréologie et la théorie des ensembles ne réside donc pas dans l'admission ou le rejet d'un individu nul. Elle est ailleurs. Ce qui sépare irrémédiablement ces deux théories, c'est l'absence de singleton dans la première. Comme nous l'avons dit, Lewis fait de la relation « (est un) singleton de » une notion primitive de son système. Celle-ci est définie implicitement au moyen de quatre axiomes (Lewis 1991, pp. 95-96). Voici le premier :

(AMAx$_1$) $(x = \{z\} \wedge y = \{z\}) \supset x = y$ Fonctionnalité.

Il signifie que « rien ne possède deux singletons différents ». Donc, d'après (AMAx$_1$), la relation « (est) un singleton de » est une *fonction* (ce que nous avons implicitement assumé dans la notation). Le deuxième axiome spécifie le *domaine* de cette fonction :

(AMAx$_2$) $[x < \varnothing \vee Singl(x) \vee (\exists yy)(x\ Fu_{petite}\ yy \wedge (\forall y)(y\ \varepsilon\ yy \supset Singl(y)))] \equiv (\exists y)\ y = \{x\}$ Domaine,

qui signifie que « toute partie de l'ensemble nul a un singleton ; tout singleton a un singleton, toute petite[45] fusion de singletons a un singleton ;

[44] Dans les faits, cela ne change rien, puisqu'il s'agit, dans le système de Lewis, autant d'un individu que d'un ensemble. En revanche, l'ensemble nul n'est pas une classe.

[45] Dans la conception naïve des ensembles, tout prédicat a un ensemble pour extension. Russell a montré que cette conception est inconsistante (prenez simplement le prédicat « (est) un ensemble qui n'est pas membre de lui-même »). Afin d'éviter cette situation, Lewis a recourt à une certain conception des ensembles (*cf.* [1991, pp. 88 *sqq.*]) qualifiée de théorie de la « limitation de taille » (sur celle-ci, *cf.* [Hallet 1984]). Elle consiste à n'admettre parmi les ensembles que des classes d'une taille restreinte, parce que ces classes se comportent de manière indésirable lorsqu'elles possèdent trop de membres. On peut faire remonter cette idée à Russell et à von Neuman, mais aussi à Cantor. Pour pouvoir mettre cette stratégie en œuvre, nous devons disposer d'une distinction entre deux types de tailles : (1) x est *grand* si et seulement si il y a des objets tels que (i) aucune paire d'entre eux ne se chevauchent, (ii) leur fusion est le tout de la réalité (*Whole of Reality*) et (iii) chacun d'entre eux contient exactement un atome qui est une partie de x et au plus un autre atome. (2) x est petit si et seulement si x n'est pas grand. La taille des objets se mesure en nombre d'atomes. (1) nous dit en fait qu'un objet est petit si le nombre d'atomes qui le composent est inférieur à celui qui composent le reste de l'univers. L'idée est alors de limiter la fonction

rien d'autre n'a un singleton ». ($AMAx_2$) fait de la fonction singleton une fonction *partielle*. Pour prendre un seul exemple, d'après cet axiome, la fonction singleton n'est pas définie pour les classes propres.

Le troisième axiome est le suivant :

($AMAx_3$) $(\forall xy)(x \neq y \supset \{x\} \lfloor \{y\}) \wedge$ $(\forall xy)((x < \varnothing \wedge Singl(y)) \supset x \lfloor y)$ Distinction.

Il signifie qu'« il n'y a pas deux objets différents qui aient des singletons qui se chevauchent et aucune partie de l'ensemble nul ne chevauche un singleton ». Les singletons sont donc distincts les uns des autres et de l'ensemble nul selon ($AMAx_3$).

Le quatrième et dernier axiome est un axiome d'*induction* :

($AMAx_4$) $[(\exists x)\, x \,\varepsilon\, xx \wedge (\forall x)(x < \varnothing \supset x \,\varepsilon\, xx) \wedge$
$(\forall xy)((y \,\varepsilon\, xx \wedge x = \{y\}) \supset x \,\varepsilon\, xx) \wedge$
$(\forall xyy)((x\ Fu\ yy \wedge (\forall y)(y \,\varepsilon\, yy \supset y \,\varepsilon\, xx)) \supset x \,\varepsilon\, xx)] \supset$
$(\forall x)\, x \,\varepsilon\, xx$ Induction,

qui signifie que « s'il y a certains objets, si chaque partie de l'ensemble nul est l'un d'eux, si chaque singleton de l'un d'eux est l'un d'eux et si chaque fusion de certains d'entre eux est l'un d'entre eux, alors tout objet est l'un d'entre eux ».

Lewis appelle « arithmétique méréologisée » le système formel axiomatisé au moyen de ($AMAx_{1\text{-}4}$). La raison en est que ce système axiomatique est parallèle à une reformulation particulière des axiomes de Peano[46] dans laquelle la notion de successeur aurait été remplacée par celle de singleton et le zéro par l'ensemble nul.

L'arithmétique méréologisée, formulée dans le cadre de la méréologie extensionnelle classique et de la logique plurielle, permet à Lewis de retrouver l'axiomatisation de Zermelo et Fraenkel de la conception itérative des ensembles dans son entièreté (Lewis 1991, pp. 100-107)[47].

VIII. Le statut métaphysique du singleton selon Armstrong

La position structuraliste de Lewis peut sembler ici très pragmatique, éludant volontairement toute une série de questions métaphysiques, comme, par exemple, celles qui concernent leur localisation, leur caractère intrinsèque, *etc.* Elle est d'ailleurs loin d'avoir satisfait tout le monde.

singleton aux petites classes. Les ensembles sont donc de petites classes, tandis que les classes propres sont de grandes classes.

[46] *Cf.* le système formulé in Lewis (1991, p. 107).

[47] *Cf.* aussi Boolos (1971 et 1989).

Certains auteurs ont ainsi tenté de préciser la nature métaphysique des singletons. David Armstrong a par exemple défendu l'idée selon laquelle ceux-ci doivent être identifiés à certains types d'états de choses[48]. Si les singletons sont bien des atomes méréologiques, ils sont néanmoins *composés* en un certain sens. Ils possèdent des « constituants » qui ne les composent pas à titre de parties[49]. De manière générale, les constituants d'un état de choses ne sont pas des parties de ces états de choses. Par exemple, a et F ne sont pas des parties de l'état de choses que a est F, c'est-à-dire de l'être-F de a. En effet, si tel était le cas, l'être-F de a subsisterait dans tous les mondes possibles où a et F existent, puisque la fusion méréologique $a + F$ existe dans tous ces mondes. Or, il y a clairement des mondes dans lesquels a et F existent tous les deux, sans que pour autant a soit F. Les singletons étant des états de choses dans l'interprétation d'Armstrong, ils contiennent leurs membres à titre de constituants, et non à titre de parties.

Si les singletons sont des états de choses qui ne se réduisent pas à des sommes méréologiques de leurs constituants, de quels états de choses s'agit-il précisément ? Prenons la propriété d'être rouge. Lorsqu'un objet est rouge, c'est également le cas de certaines de ses parties. En revanche, une propriété telle qu'avoir une masse d'un kilogramme ne se comporte pas de la sorte : lorsqu'un objet a une masse d'un kilogramme, ce n'est le cas d'aucune de ses parties propres. Les propriétés de ce genre sont ce qu'Armstrong appelle des « propriétés déterminant une unité » (*unit-determining properties*) (1991, p. 197). L'idée est que ces propriétés permettent de sélectionner des unités déterminées ; relativement à ces propriétés, les objets forment des unités, des choses d'un certain type. Si l'on nous met à présent en face de quelque chose de rouge, quelle réponse faut-il apporter à la question de savoir combien il y a d'objets rouges devant nous ? Il y en a certes plusieurs, mais combien exactement, ce n'est pas clair. D'après Armstrong, tout objet possède au moins une propriété déterminant une unité (1991, p. 198). La propriété de posséder une certaine propriété déterminant une unité, ce que l'on pourrait appeler l'« unitarité » (*unithood*), selon une suggestion de Lewis, est une propriété que possède également tout objet. Il s'agit d'une propriété de second-ordre qui survient sur la possession par cet objet d'au moins une propriété déterminant une unité. La thèse d'Armstrong est qu'un singleton doit être identifié à l'état de

[48] *Cf.* Armstrong (1991).

[49] Lewis nie précisément qu'il y ait un type de composition non méréologique. Pour lui, la méréologie est purement et simplement la théorie *générale* de la composition, et non d'un type particulier de composition. *Cf.* Lewis (1991, p. 57).

choses (méréologiquement atomique) *que* son membre a la propriété d'unitarité[50]. Les classes de plusieurs membres étant des fusions de singletons, ce sont donc des *conjonctions* d'états de choses, c'est-à-dire des états de choses conjonctifs.

Cette solution permet à Armstrong de répondre en partie à certaines des questions métaphysiques laissées en suspend par Lewis[51]. Malheureusement, elle est inconsistante. Gideon Rosen a en effet montré que l'on pouvait dériver une version du paradoxe de Russell dans la théorie lewisienne des ensembles à laquelle est ajoutée l'interprétation armstrongienne des singletons comme états de choses[52].

Au final, il n'y a rien de bien surprenant ici. Lewis nous avait prévenus : l'extravagance et la puissance ontologique de la théorie des ensembles – son côté M. Hyde – réside dans sa capacité à produire une hiérarchie infinie d'ensembles, laquelle capacité réside au final dans la fonction singleton. Mais, nous avait-il également promis, le mystère du singleton a un revers positif, un côté Dr. Jekyll dont le caractère inoffensif devrait nous apaiser. Cette partie ontologiquement innocente de la théorie des ensembles est à rechercher dans la méréologie, et plus précisément dans la capacité qu'a l'opération de fusion méréologique de pouvoir produire des touts à partir de divers éléments pris à titre de parties. C'est cette prétendue innocence de la méréologie que nous analyserons pour finir.

IX. La méréologie est-elle ontologiquement innocente ?

De nombreux auteurs rejettent le principe de composition non restreinte (MAx_2), parce qu'il semble donner lieu à une ontologie extravagante, ou à tout le moins luxuriante. Lewis pense que les craintes de ce type sont sans fondement, car la méréologie est « ontologiquement innocente » :

> À n'en pas douter, si nous acceptons la méréologie, nous nous engageons envers l'existence de toutes sortes de fusions méréologiques. Mais étant donné un engagement préalable envers, disons, les chats, un engagement

[50] Nous trouvons une interprétation apparentée à celle d'Armstrong chez John Bigelow (1990). Plutôt que d'identifier un singleton à un état de choses, Bigelow l'identifie à son « essence individuelle », ce que la tradition scotiste appelle l'*heccéité*. *Cf.* Sondag (2005, p. 34).

[51] Par exemple, en ce qui concerne leur localisation, Armstrong (1991, p. 198) soutient que les singletons se trouvent là ou se situent leurs membres.

[52] *Cf.* Rosen (1995, pp. 619-621). D'autres critiques de la thèse d'Armstrong peuvent être trouvées in Oliver (1992, pp. 129-140). Armstrong (1995 et 1997, chap. 12) tente de répondre à l'objection de Rosen et à d'autres.

> envers les fusions-de-chats ne représente pas un engagement *supplémentaire*. Cette fusion n'est rien de plus [*nothing over and above*] que les chats qui la composent. Elle n'*est* rien d'autre qu'eux. Eux ne *sont* rien d'autre qu'elle. Que vous les preniez ensemble ou séparément, les chats constituent la même portion de Réalité dans les deux cas. (Lewis 1991, p. 81).

La méréologie est ontologiquement innocente, parce que la composition méréologique l'est, et celle-ci l'est à son tour parce qu'elle ne nous engage pas ontologiquement envers une entité supplémentaire par rapport à celles qui la composent : la fusion méréologique n'est rien de plus et rien d'autre que les objets qui la composent. Si Socrate et Platon existent, leur fusion méréologique Socrate + Platon n'est pas une entité supplémentaire dans notre ameublement du monde. Autrement dit, la fusion Socrate + Platon est identique à Socrate et Platon pris collectivement. Lewis soutient ainsi une thèse de la « composition comme identité » (*composition as identity*), laquelle justifie *in fine* le caractère ontologiquement innocent de la méréologique (Lewis 1991, p. 82).

En faveur de la thèse de la composition comme identité, nous pourrions utiliser l'idée, développée par Armstrong, selon laquelle la relation de partie à tout est un cas particulier de l'« identité partielle » (Armstrong 1978, p. 37)[53]. La région bruxelloise est une partie de la Belgique. En ce sens, nous pouvons dire que cette région et ce pays, bien que n'étant pas strictement identiques, ne sont pas pour autant totalement distincts l'un de l'autre : ils sont *en partie identiques*. La relation de chevauchement, c'est-à-dire le fait d'avoir une partie en commun, est donc un cas particulier de la relation d'identité partielle. Si nous considérons à présent, la fusion de la région bruxelloise et de la région flamande, cette somme méréologique est elle aussi partiellement identique à la Belgique. Qu'en est-il alors de la somme des trois régions – bruxelloise, flamande et wallonne – qui composent la Belgique ? Il semble assez naturel de dire qu'elle est totalement identique à la Belgique, que la Belgique n'est rien de plus que la fusion de ces trois régions, ou encore que les trois régions en questions sont collectivement identiques à la Belgique. Si le chevauchement est un cas particulier de l'identité partielle, alors le cas limite du chevauchement – avoir toutes ses parties en commun – est un cas particulier du cas limite de l'identité partielle – être totalement identique.

Nous pouvons distinguer une version « forte » de la thèse de la composition comme identité d'après laquelle la relation de composition,

---

[53] *Cf.* aussi Cotnoir (2014, p. 4).

c'est-à-dire la converse de la relation de fusion, n'est rien d'autre que la relation d'identité numérique :

(1) $y\ Fu\ xx \equiv xx = y$ Composition comme identité,

et une version « faible » d'après laquelle la relation de composition est seulement « analogue » à la relation d'identité. À la différence, pense-t-il, de Donald Baxter[54], Lewis défend explicitement la version faible de la thèse de la composition comme identité :

> [...] les relations méréologiques [...] présentent une analogie frappante avec l'identité ordinaire, c'est-à-dire la relation de un à un qu'entretient chaque chose avec elle-même et avec rien d'autre. Cette analogie est si frappante que l'on peut la souligner en parlant des relations méréologiques – la relation de plusieurs à un qu'est la relation de composition, les relations de un à un que sont les relations de partie à tout et de chevauchement – comme des types d'identité. (Lewis 1991, p. 84[55]).

La thèse de la composition comme identité, même dans sa version faible, est loin de faire l'unanimité. Qui plus est, il n'est pas totalement clair dans quelle mesure cette thèse entraîne celle de l'innocence ontologique de la méréologie. Malheureusement, nous ne pouvons ici explorer les diverses critiques qui ont été adressées à ces thèses[56]. Nous nous contenterons de souligner, avec Peter van Inwagen (1994, pp. 210-211), que le type d'identité présent dans (1) ci-dessus est loin d'aller de soi. Nous connaissons en effet l'identité entre deux termes singuliers, comme celle que nous trouvons dans « Cicéron est Marcus Tullius », ou l'identité entre deux termes pluriels[57], comme celle que nous trouvons dans « Russell et Whitehead sont les auteurs des *Principa Mathematica* », mais y a-t-il réellement un sens à parler d'une relation d'identité « hybride » entre un terme singulier et un terme pluriel ?

---

[54] *Cf.* Baxter (1988a et 1988b). Contre Lewis, Yi soutient que Baxter ne défend pas la version forte de la thèse de la composition comme identité, et même la critique. *Cf.* (Yi 1999, note 13, p. 158). Elle est en revanche bien soutenue aujourd'hui par Megan Wallace (2011).
[55] *Cf.* aussi la note 12 de la même page.
[56] Pour une synthèse, *cf.* Cotnoir (2014, pp. 11 *sqq.*) ; ainsi que Bennett (à paraître).
[57] Nous pourrions définir ce deuxième type d'identité de la manière suivante :
$(\forall xxyy)\ xx = yy \equiv (\forall z)(z \varepsilon\ xx \equiv z\ \varepsilon yy)$.

X. Conclusion

En 1916, Leśniewski, dans son style baroque si caractéristique, s'insurgeait contre les classes de la théorie des ensembles, ces « créations libres » issues de « la centrifugeuse des esprits mathématiques équipés d'un appareil de "libre création" et démoralisés par les constructions spéculatives "détachées de la réalité" » (Leśniewski 1916, p. 6). Ne pouvant se satisfaire de ces entités, il se proposait de leur substituer des constructions plus en harmonie avec le « sens commun » : les sommes ou fusions méréologiques. Néanmoins, on peut légitimement se demander si renoncer aux classes pour des raisons uniquement philosophiques ne revient pas à jeter le bébé avec l'eau du bain. Que deviennent les mathématiques une fois que nous avons substitué la théorie des touts et des parties à la théorie des ensembles ? Pouvons-nous reconstruire l'édifice mathématique sur la seule base de la méréologie ? Malheureusement, les notes de Leśniewski sur ces questions ont disparu, si bien que nous ne connaitrons probablement jamais son opinion à ce sujet. D'un point de vue purement philosophique, cette perte n'est toutefois pas très grave, car il semble tout simplement impossible de fonder les mathématiques sur la seule méréologie classique. Celle-ci est en réalité trop faible pour pouvoir formaliser l'arithmétique, même élémentaire (Simons 2006, p. 600)[58]. Il ne s'agit jamais que d'une algèbre booléenne, éventuellement complète lorsqu'elle comprend un principe de composition non restreinte[59].

Le fait que la méréologie classique ait la même structure que l'algèbre booléenne nous indique une autre voie à suivre que celle empruntée par la tradition nominaliste. D'une part, le manque de pouvoir expressif de la théorie des touts et des parties exige qu'elle soit *combinée* avec une autre théorie pour pouvoir rendre compte de la totalité des mathématiques. D'autre part, en vertu de la structure commune à la méréologie et à l'algèbre booléenne, il y a une analogie de caractère formel entre certains foncteurs méréologiques et certains foncteurs ensemblistes, cette analogie autorisant la réduction des seconds aux premiers. Nous obtenons alors une méréologisation de la théorie des ensembles composée de deux parties : l'une constitue le noyau irréductiblement ensembliste de la théorie et l'autre la réduction méréologique de tout ce qui n'appartient pas à ce noyau. Chez Lewis, le noyau ensembliste est représenté par la théorie du

[58] On notera également que, contrairement à la théorie des ensembles, la méréologie n'a pas seule les moyens nécessaires pour développer une théorie des relations, puisqu'elle ne peut représenter des paires ordonnées.

[59] Elle peut aussi être atomique, comme c'est le cas chez Lewis.

singleton et la réduction méréologique par la thèse selon laquelle les parties d'une classe sont ses sous-classes.

Malgré l'élégance de cette solution au problème des relations entre méréologie et théorie des ensembles[60], l'entreprise lewisienne bute sur un obstacle, le même en fait que celui qui avait poussé Leśniewski à développer la méréologie : le caractère inexplicable de la notion de classe, qui trouve son origine dans la nature mystérieuse du singleton.

> Hélas, la notion de singleton n'a jamais été convenablement expliquée : parler du rassemblement d'une pluralité en une unité ne s'applique pas aux ensembles ne comprenant qu'un seul membre [...]. Je me demande comment il nous est possible de comprendre la notion primitive de singleton, et même si nous la comprenons effectivement. (Lewis 1991, p. vii)

Contrairement à Leśniewski, Lewis ne renonce pas pour autant à la notion de singleton. Abandonner celle-ci, ce serait abandonner les classes, et donc une grande partie des mathématiques. Il serait à son avis présomptueux, voire ridicule, d'exiger des mathématiciens qu'ils renoncent à leur discipline pour des raisons uniquement philosophiques :

> Les mathématiques sont une affaire florissante et bien établie. La philosophie est aussi incertaine que possible. Rejeter les mathématiques pour des raisons philosophiques serait absurde. Si les philosophes sont profondément déroutés par les classes qui constituent la réalité mathématique, c'est leur problème. Il ne faut pas s'attendre à ce que les mathématiques disparaissent pour nous rendre la vie plus facile. (Lewis 1991, p. 58).

Sur ce point, nous ne pouvons que donner raison à Lewis. Pourtant, nous pouvons aussi regretter qu'il n'ait pas tenté d'approfondir plus avant la notion de singleton d'un point de vue philosophique. Certes, une interprétation comme celle d'Armstrong n'est pas satisfaisante, mais ce n'est pas pour autant qu'une entreprise telle que la sienne soit inutile. Lewis donne par moments l'impression d'avoir non seulement renoncé à rejeter les mathématiques, mais même à en fournir une interprétation métaphysiquement éclairante, préférant se contenter d'un point de vue simplement structurel.

---

[60] Geoffrey Hellman (à paraître) synthétise les différentes utilisations de la méréologie au service de la fondation des mathématiques. Étrangement, il ne fait aucune mention de Leśniewski.

On rétorquera peut-être que si Lewis n'a pas réussi à éclaircir la notion de singleton, il nous aura au moins permis d'asseoir le reste de la théorie des ensembles sur une base absolument non problématique : la méréologie. Pour lui, ce qu'il y a de spécifiquement méréologique dans la théorie des ensembles, c'est la composition des classes à partir de classes plus petites. Or, cette opération est parfaitement innocente et ne mérite pas vraiment qu'on s'en préoccupe. Nous avons vu qu'une telle confiance était loin d'aller de soi. Elle va d'ailleurs si peu de soi que la thèse de la composition comme identité qui la soutient est aujourd'hui l'une des plus discutées en métaphysique contemporaine[61].

La théorie méréologisée des ensembles de Lewis repose sur deux foncteurs primitifs : la relation de partie à tout et la fonction singleton[62]. Cette division des foncteurs primitifs reflète la division du travail philosophique opérée dans *Parts of Classes*. Nous avons ainsi d'un côté une face non problématique – la composition méréologique – et de l'autre une face profondément mystérieuse – le singleton. Le problème, pourrions-nous dire, est qu'au terme de l'ouvrage de Lewis, ni la partie mystérieuse, ni la partie non problématique n'auront été réellement éclairées, la seconde se révélant même beaucoup plus difficile à cerner que ne l'avait d'abord soupçonné Lewis. Mais l'intérêt de l'entreprise lewisienne est peut-être ailleurs. Son ouvrage constitue en effet une pièce à conviction importante en faveur de la thèse d'une portée plus large de la relation de partie à tout, plus large en tout cas que celle qui lui est habituellement attribuée. Elle est en effet plus souvent qu'à son tour limitée au domaine uniquement spatial. Le travail de Lewis sur la théorie des ensembles nous enjoint alors à nous interroger sur le caractère *ontologico-formel* de la méréologie. Y a-t-il une universalité de la relation de partie à tout ? S'applique-t-elle à différentes catégories ontologiques ou à une seule ? Et si elle s'applique à plusieurs catégories, le fait-elle à chaque fois de la même manière, de sorte qu'il n'y a qu'une seule méréologie authentique, exemplairement la méréologie extensionnelle classique ? Pour notre part, nous penchons plutôt pour un noyau méréologico-formel minimal joint à un pluralisme compositionnel.

[61] En témoigne la récente publication d'un volume édité par Cotnoir et Baxter (2014).

[62] En fait, à ces deux foncteurs primitifs, il faudrait aussi ajouter ceux requis par la logique plurielle sous-jacente au système méréologico-ensembliste de Lewis.

Bibliographie

D.M. Armstrong, *Universals and Scientific Realism. Volume II : A Theory of Universals*, Cambridge, Cambridge University Press, 1978.

D.M. Armstrong, « Classes are States of Affairs », in *Mind*, 100/338, 1991, pp. 189-200.

D.M. Armstrong, « Reply to Rosen », in *Australasian Journal of Philosophy*, 73/4, 1995, pp. 626-628.

D.M. Armstrong, *A World of States of Affairs*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.

D.L.M. Baxter, « Identity in the Loose and Popular Sense », in *Mind*, 97/388, 1988a, pp. 575-582.

D.L.M. Baxter, « The Many-One Identity », in *Philosophical Papers*, 17/3, 1988b, pp. 193-216.

K. Bennett, « Perfectly Understood, Unproblematic, and Certain : Lewis on Mereology », in B. Loewer et J. Schaffer (éds.), *The Blackwell Companion to David Lewis*, Oxford, Blackwell, à paraître.

J. Bigelow, « Sets are Universals », in A. Irvine (éd.), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer, 1990, pp. 291-305.

G. Boolos, « The Iterative Conception of Sets », 1971, in G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, R. Jeffrey (éd.), Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1998, pp. 13-29.

G. Boolos, « To Be is to Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables) », 1984, in G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, R. Jeffrey (éd.), Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1998, pp. 54-72.

G. Boolos, « Iteration Again », 1989, in G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, R. Jeffrey (éd.), Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1998, pp. 88-104.

H.C. Bunt, *Mass Terms and Model-Theoretic Semantics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

J.P. Burgess, A.P. Hazen et D. Lewis, « Appendix on Pairing », in D. Lewis, *Parts of Classes*, Oxford, Blackwell, 1991, pp. 121-149.

B. Caplan, Chr. Tillman et P. Reeder, « Parts of Singletons », in *The Journal of Philosophy*, 107/10, 2010, pp. 501-533.

G. Cantor, « Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre », 1883, in G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo (éd.), Hildesheim, Olms, 1962 (1932), pp. 165-208.

R. Casati et A.C. Varzi, *Parts and Places. The Structure of Spatial Representation*, Cambridge (Mass.), MIT Press, 1999.

L. Champollion, « Linguistic Applications of Mereology »¸ en ligne: http://www.nyu.edu/projects/champollion/champollion-esslli-2012.pdf, 2012 (page consultée le 22 novembre 2014).

A.J. Cotnoir, « Composition as Identity. Framing the Debate », in A.J. Cotnoir et D.L.M. Baxter, (éds.), *Composition* as *Identity*, Oxford, Oxford University Press, 2014, pp. 3-23.

A.J. Cotnoir et D.L.M. Baxter, (éds.), *Composition* as *Identity*, Oxford, Oxford University Press, 2014.

C. Eschenbach et W. Heydrich, « Classical Mereology and Restricted Domains », in *International Journal of Human-Computer Studies*, 43/5-6, 1995, pp. 723-740.

K. Fine, « Toward a Theory of Parts », in *Journal of Philosophy*, 57/11, 2010, pp. 559-589.

N. Goodman, *La Structure de l'apparence*, trad. fr. J.-B. Rauzy, Paris, Vrin, 2004 (1951).

M. Hallet, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, Clarendon Press, 1984.

M. Hand, « What the Null Set Could Not Be », in *Australasian Journal of Philosophy*, 73/3, 1995, pp. 429-431.

G. Hellman, « Mereology in Philosophy of Mathematics », in H. Burkhardt, J. Seibt et G. Imaguire (éds.), *Handbook of Mereology*, Munich, Philosophia Verlag, à paraître.

P. Hovda, « What is Classical Mereology ? », in *The Journal of Philosophical Logic*, 38, 2009, pp. 55-82.

K. Koslicki, *The Structure of Objects*, Oxford, Oxford University Press, 2008.

Cz. Lejewski, « The Consistency of Leśniewski's Mereology », in *The Journal of Symbolic Logic*, 34/3, 1969, pp. 321-328.

H.S. Leonard et N. Goodman, « The Calculus of Individuals and its Uses », in *The Journal of Symbolic Logic*, 5/2, 1940, pp. 45-55.

St. Leśniewski, « Podstawy ogólnej teorii mnogości. I », in *Prace polskiego koła naukowego w Moskwie. Sekcya matematyczno-przyrodnicza*, 2, 1916, pp. 1-42.

St. Leśniewski, *Sur les fondements de la mathématique. Fragments (Discussions préalables, méréologie, ontologie)*, trad. fr. G. Kalinowski, Paris, Hermès, 1989 (1927-1931).

D. Lewis, « Postscripts to "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic" », in *Philosophical Papers. Volume I*, Oxford, Oxford University Press, 1983, pp. 39-46.

D. Lewis, *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Blackwell, 1986a.

D. Lewis, « Against Structural Universals », in *Australasian Journal of Philosophy*, 64/1, 1986b, pp. 25-46.

D. Lewis, *Parts of Classes*, Oxford, Blackwell, 1991.

D. Lewis, « Mathematics is Megethology », in *Philosophia Mathematica*, 3/1, 1993, pp. 3-23.

Kr. McDaniel, « Modal Realism with Overlap », in *Australasian Journal of Philosophy*, 82/1, 2004, pp. 137-152.

A. Oliver, « The Metaphysics of Singletons », in *Mind*, 101/401, 1992, pp. 129-140.

A. Oliver, « Are Subclasses Parts of Classes ? », in *Analysis*, 54/4, 1994, pp. 215-223.

A. Oliver et Th. Smiley, *Plural Logic*, Oxford, Oxford University Press, 2013.

M. Potter, « Review of *Parts of Classes* », in *The Philosophical Quarterly*, 43/172, 1993, pp. 363-364.

L. Ridder, *Mereologie. Ein Beitrag zur Ontologie und Erkenntnistheorie*, Francfort, Vittorio Klostermann, 2002.

G. Rosen, « Armstrong on Classes as States of Affairs », in *Australasian Journal of Philosophy*, 73/4, 1995, pp. 613-625.

M. Rossberg, « Leonard, Goodman, and the Development of the *Calculus of Individuals* », in G. Ernst, J. Steinbrenner et O.R. Scholz (éds.), *From Logic to Art. Themes from Nelson Goodman*, Francfort, Ontos, 2009, pp. 51-69.

Th. Sider, *Four-Dimensionalism,* Clarendon Press, Oxford, 2001.

P. Simons, *Parts. A Study in Formal Ontology*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

P. Simons, « Real Wholes, Real Parts : Mereology and Algebra », in *The Journal of Philosophy*, 103/12, 2006, pp. 597-613.

G. Sondag, « Introduction au *Principe d'individuation* de Duns Scot », in Duns Scot, *Le Principe d'individuation*, Paris, Vrin, 2005, pp. 7-68.

A. Tarski, « Zur Grundlegung der booleschen Algebra. I », in *Fundamenta Mathematicae*, 24, 1935, pp. 177–198.

G. Uzquiano, « Unrestricted Unrestricted Quantification : The Cardinal Problem of Absolute Generality », in A. Rayo et G. Uzquiano (éds.), *Absolute Generality*, Oxford, Oxford University Press, 2006, pp. 305-332.

P. van Inwagen, *Material Beings*, Ithaca, Cornell University Press, 1990.

A. Varzi, « Mereology », in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, en ligne: http://plato.stanford.edu/entries/mereology/, 2014 (page consultée le 19 octobre 2014).

M. Wallace : « Composition as Identity : Parts I & II », in *Philosophy Compass*, 6/11, 2011, pp. 804-816 et 817-827.

B.-U. Yi., « Is Mereology Ontologically Innocent ? », in *Philosophical Studies*, 93, 1999, pp. 141-160.

E. Zermelo, « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I », in *Mathematische Annalen*,65/2, 1908, pp. 261-281.